THEORIE

DER KREISFÖRMIGEN SYMMETRISCHEN

TONNENGEWÖLBE

VON CONSTANTER DICKE, WELCHE NUR IHR EIGENES GEWICHT TRAGEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR ERLANGUNG

DER

DOCTORWÜRDE IN DER NATURWISSENSCHAFT

VORGELEGT VON

LUDWIG PILGRIM.

STUTTGART 1876.

Druck von Gebrüder Kröner in Stuttgart.

Vorwort.

Die Aufgabe, die Pressungen in einem aus einzelnen Steinen bestehenden Gewölbe durch Rechnung zu ermitteln, ist meines Wissens noch nicht in aller Strenge gelöst. Die im Folgenden versuchte Lösung beschränkt sich auf einen speziellen Fall, da eine ähnliche Behandlung eines Gewölbes von beliebiger Gestalt und mit beliebiger Belastung allzu komplizirte Formeln ergeben würde. Der nämliche Gang der Untersuchung ist auch in komplizirteren Fällen einzuhalten. Für beliebig belastete Gewölbe wird es sich empfehlen, Annäherungsformeln aufzustellen, die auf den gleichen Prinzipien beruhen, und welche in Bezug auf Genauigkeit dem üblichen graphischen Verfahren an die Seite zu stellen wären. Ich habe mit dieser Untersuchung begonnen und gedenke dieselbe später zu veröffentlichen. Die in der vorliegenden Abhandlung erhaltenen Resultate lassen sich als Anhaltspunkte in Fällen benützen, die von den hier behandelten wenig abweichen; z. B. kann man, ohne einen merklichen Fehler zu begehen, schwach belastete Gewölbe auf unbelastete zurückführen durch Vergrösserung von γ. Der dabei begangene Fehler ist um so kleiner, je flacher der Gewölbebogen. Beim scheitrechten Gewölbe mit vertikalen Fugen erhält man auf die angegebene Weise genaue Resultate.

Auch für unsymmetrische Gewölbe können die gefundenen Beziehungen praktisch benützt werden, wenn man dieselben zu symmetrischen Gewölben ergänzt denkt. Die sich ergebenden Pressungen und Gewölbstärken werden um Weniges zu gross, somit der Sicherheit günstig.

Mit manchen Formeln wurden Umformungen vorgenommen, welche zu bemerkenswerthen Beziehungen führen; namentlich wurden viele Ausdrücke so gestaltet, dass man einen Näherungswerth und dessen Ergänzung zum genauen Werthe erkennen kann. Wer sich mit der Bezeichnungsweise vertraut gemacht hat, wird solches leicht finden. Auch lassen sich aus den numerischen Resultaten (§. 9) Schlüsse ziehen, die für den Theoretiker interessant und für den Praktiker von Nutzen sind.

Stuttgart, im Januar 1877.

Pilgrim.

Die Resultante aller auf eine Gewölbfuge wirkenden Kräfte schneidet diese in einem Punkte, dem Druckmittelpunkte der Fuge.

Lässt man die Fuge ihre Lage stetig ändern, so bilden die entsprechenden Druckmittelpunkte eine Kurve, die Druckkurve (Stützlinie) des Gewölbes. Die Gestalt dieser Kurve ist abhängig von der Anordnung der Fugen.

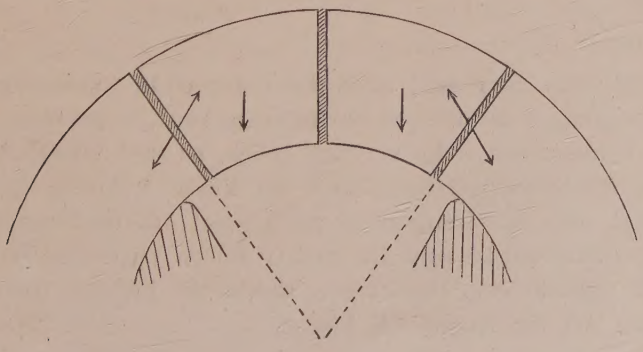
Man nennt ein Tonnengewölbe symmetrisch, wenn eine Vertikalebene durch den Mittelpunkt der Bogenlinie desselben eine Symmetralebene ist; die Druckkurve eines solchen ist bestimmt, wenn zwei nicht symmetrisch liegende Punkte derselben gegeben sind.

Unter den möglichen Druckkurven ziehen wir diejenige in Betracht, welche gleiche Pressungen in den Bruchfugen zur Folge hat.

Letztere Annahme begründen wir wie folgt:

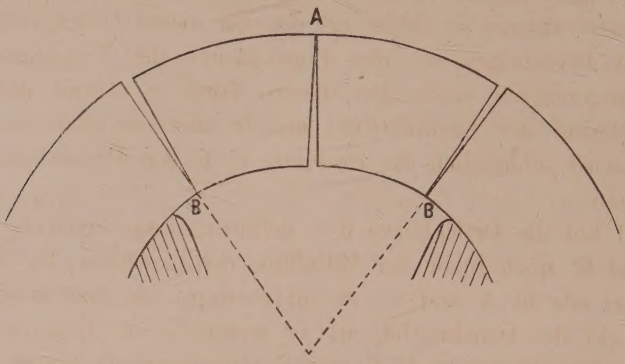
Wir nehmen zunächst an, das Gewölbe habe eine Scheitelfuge, die übrigen Fugen seien symmetrisch vertheilt; ferner setzen wir voraus, dass der Mörtel im Vergleich zu den Gewölbsteinen sehr nachgiebig sei.

Fig. 1.



Wird das Lehrgerüst zuerst unter den beiden der Scheitelfuge zunächst liegenden Gewölbstücken weggenommen, so bewegen sich diese, der Schwere folgend, vertikal abwärts; dadurch wird der Mörtel in den Grenzfugen kom-

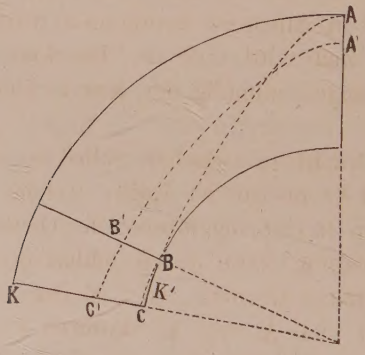
Fig. 2.



primirt und übt in Folge dessen einen Druck auf die sich bewegenden Fugenflächen aus.

Dieser Druck bewirkt eine Drehung der sich senkenden Gewölbtheile. Ist der Mörtel sehr weich, so wird diese Drehung erst aufhören, wenn sich die Kanten der Gewölbsteine in A und B berühren.

Fig. 3.



Beseitigt man nach und nach das Lehrgerüste vollständig, so finden ähnliche Bewegungen der übrigen Gewölbsteine statt. Lässt man die Hinwegnahme des Lehrgerüstes stetig vor sich gehen, so wird unmittelbar nach der Ausschalung die Druckvertheilung nach der Kurve A B, Fig. 3, stattfinden.

Beseitigt man das Lehrgerüste auf einmal, so wird die vertikale Bewegung der Gewölbstücke zunächst in den untern Fugen modificirt; auch in diesem Falle entsteht eine Druckkurve, welche die Leibung und den Rücken berührt, nach Art der Kurve A B Fig. 3.

Die Kurve A B hat unendlich grosse Pressungen in A und B zur Folge (wenn wir voraussetzen, dass der Mörtel keinen Widerstand gegen Zug leistet). Es findet daher ein Nachgeben oder Zerstören der Gewölbsteine in diesen Fugen statt. Dadurch nähern sich die Druckmittelpunkte der Fugen A und B der Mittellinie des Gewölbes. Diese Aenderung der Druckkurve dauert so lange, bis die den neuen Druckmittelpunkten entsprechenden Pressungen an den Fugenkanten der Festigkeit des Gewölbmaterials angemessen sind. Bei diesem Vorgang nimmt die Pressung an der Aussenkante der Kämpferfuge zu. Ist das Gewölbmaterial sehr nachgiebig, so wird schliesslich die Pressung in K den Pressungen in A und B gleichkommen.

Damit hat die Druckkurve ihre definitive Lage erreicht. Denn nähern sich A' und B' noch mehr der Mittellinie des Gewölbes, so wird der Druck in K grösser als in A und B, es findet dann ein Nachgeben bei K statt, dadurch rückt der Druckmittelpunkt C' wieder in die Lage, welche er hatte, als die drei Pressungen in A, B und K einander gleich waren. Wir nennen die eben erwähnte Kurve die Kurve der kleinsten Maximalpressungen *).

Zur theoretischen Bestimmung der Gewölbstärke können wir dieselbe zu Grunde legen, indem wir festsetzen, dass die einander gleichen Pressungen in den Bruchfugen gleich der zulässigen Inanspruchnahme des Gewölbmaterials werden.

Bezüglich der Pressungen in einem bestehenden Gewölbe ergibt die oben angestellte Betrachtung über allmälige Entstehung und Aenderung der Druckkurve, dass das Gewölbe in den Bruchfugen A und B bis zur äussersten Festigkeitsgrenze in Anspruch genommen wird **).

Im Laufe der Zeit wird sich die Druckkurve durch Nachgeben der Steine in den Bruchfugen allmälig der Kurve kleinster Maximalpressungen nähern.

Gibt es keine Bruchfuge zwischen Scheitel- und Kämpferfuge, so verschieben sich A' und C' bis zu der Lage, welche bei gleicher Pressung in A und K' die kleinsten Inanspruchnahmen des Gewölbmaterials zur Folge hat.

Die Druckvertheilung kann durch fehlerhafte Form einzelner Gewölbsteine wesentlich modificirt werden. Ist z. B. der Schlussstein an der Leibung zu breit, so entfernt sich A' von A, dadurch kann unter Umständen die Druckkurve bei B aus dem Gewölbe austreten und ein Kippen um B eintreten. Ist der Schlussstein am Rücken zu breit, so hat dies bei den von uns betrachteten Gewölben kein Kippen zur Folge.

---

*) Vergl. Culmann, Graph. Statik. Zürich. 1866. S. 445.

**) Vergl. die Abhandlung von Clericetti, Civil-Ingenieur. XX. Bd. 1874. S. 350. Original in Il Polytechnico. Anno XXI. num. 8, 9, 10.

Eintheilung.

Wir theilen unsere Aufgabe folgendermassen ein:

1) Die Kräfte in der Scheitel- und Kämpferfuge, wenn die Druckkurve durch bestimmte Punkte dieser Fugen geht. Bestimmungen der Pressungen daselbst.
2) Der Druckmittelpunkt einer beliebigen Fuge.
3) Die Fugen, in welchen bei gegebener Druckkurve die grösste Pressung stattfindet (Bruchfugen).
4) Der Horizontalschub, welcher gleiche Maximalpressungen in der Scheitel- und Kämpferfuge zu Folge hat.
5) Die Maximalpressung in der zwischen Scheitel- und Kämpferfuge liegenden Bruchfuge gleich den Maximalpressungen in ersteren.
6) Die Gewölbstärke bei vorgeschriebener Maximalpressung.
7) Die Druckkurve und die Maximalpressungen in einem Gewölbe, welches keine Bruchfuge zwischen Scheitel- und Kämpferfuge hat.

Bezeichnungen.

H Horizontalschub des Gewölbes.

Q Gewicht des Gewölbstücks vom Scheitel bis zur Fuge, deren Vertikalneigung φ ist (kurz Fuge φ).

Q_1 Gewicht der Gewölbhälfte (Scheitel- bis Kämpferfuge).

R Reaktion in der Fuge φ.

R_1 Reaktion des Widerlagers.

N Normaldruck in der Fuge φ.

N_1 Normaldruck in der Kämpferfuge.

p_0 Pressung an den Kanten der Scheitelfuge.

p „ „ „ „ „ Fuge φ.

p_1 „ „ „ „ „ Kämpferfuge.

Das { obere / untere } Zeichen bezieht sich auf die Pressung an { dem / der } Gewölb-{ rücken / leibung }.

k Pressung, welche ein Zerdrücken der Gewölbsteine zur Folge hat.

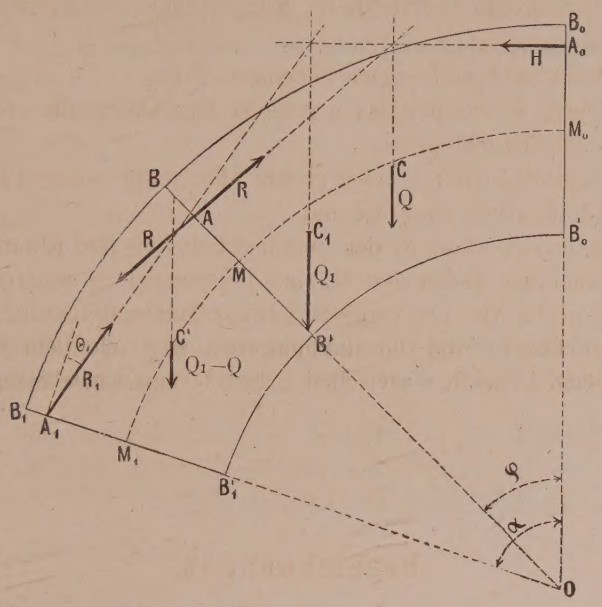
k' Spannung, welche das Zerreissen des Bindemittels bewirkt.

γ Gewicht der Kubikeinheit des Gewölbematerials.

A_0, A und A_1 Druckmittelpunkte der Scheitelfuge, der Fuge φ und der Kämpferfuge.

C und C_1 Angriffspunkte der Gewichte Q und Q_1 (Schwerpunkte).
M_0, M und M_1 Fugenmitten.
O Mittelpunkt der Bogenlinie des Gewölbes.

Fig. 4.



a Halbmesser der Leibung.

$$r = a + \frac{d}{2} = OM.$$

d Gewölbdicke.

$c = OC$ $\qquad c_1 = OC_1$.

$\varphi = \sphericalangle M_0OM$ Vertikalneigung der Fuge OM.

$$\alpha = \varphi_1 = \sphericalangle M_0OM_1 = \frac{1}{2} \text{ Gewölbwinkel.}$$

$$\lambda = \frac{H}{rd\gamma}$$

$$\mu = \frac{Q}{rd\gamma} = \varphi \qquad \mu_1 = \frac{Q_1}{rd\gamma} = \alpha.$$

$$\nu = \frac{N}{rd\gamma} \qquad \nu_1 = \frac{N_1}{rd\gamma}.$$

$$\delta = \frac{d}{2r} = \frac{1}{\frac{2a}{d} + 1}.$$

$y_0 = M_0A_0$, $\qquad y = MA$, $\qquad y_1 = M_1A_1$.

$\eta_0 = \frac{y_0}{r}$, $\eta = \frac{y}{r}$, $\eta_1 = \frac{y_1}{r}$.

$y \gtrless o$, je nachdem $OA \gtrless OM$.

w Spannweite des Gewölbes $= 2a \sin \alpha$.

f Pfeilhöhe $= a\,(1 - \cos \alpha) = \frac{1}{2}\, w \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$.

Die Fugenebenen sind senkrecht zur Gewölbeleibung.

---

§. 1.

Die Kräfte in der Scheitel- und Kämpferfuge, wenn die Druckkurve durch bestimmte Punkte dieser Fugen geht. Pressungen daselbst.

Wir betrachten ein Gewölbstück zwischen Scheitel- und Kämpferfuge, welches begrenzt ist durch zwei zur horizontalen Gewölbaxe senkrechte Ebenen, deren Abstand gleich der Längeneinheit.

Es wird

(1) $$Q_1 = r\,d\,\gamma\,\alpha$$

$$c_1 = \left(r + \frac{\left(\frac{1}{2}\,d\right)^2}{3\,r}\right) \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$$

(2) $$= r\left(1 + \frac{\delta^2}{3}\right) \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}}$$

Aus einer Momentengleichung in Bezug auf A_1 ergibt sich der Horizontalschub H, wenn y_0 und y_1 gegeben sind

$$H\,(OA_0 - OA_1 \cos \alpha) = Q_1 \left(OA_1 \sin \alpha - OC_1 \sin \frac{\alpha}{2}\right)$$

oder

$$H\left[r + y_0 - (r + y_1) \cos \alpha\right] = Q\left[(r + y_1) \sin \alpha - r\left(1 + \frac{\delta^2}{3}\right) \frac{\sin \frac{\alpha}{2}}{\frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\alpha}{2}\right]$$

daraus folgt

$$\frac{H}{r\,d\gamma} = \lambda = \frac{\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1 + \eta_1 \alpha \sin \alpha - \frac{1}{3}\delta^2 (1 - \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha + \eta_0 - \eta_1 \cos \alpha} \tag{3}$$

setzt man

$$\lambda_0 = \frac{\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1}{1 - \cos \alpha} = \alpha \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} - 1 \tag{4}$$

so wird

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\eta_1 (\lambda_0 + 1 - \cos \alpha) - \eta_0 \lambda_0 - \frac{1}{3}\delta^2 (1 - \cos \alpha)}{1 - \cos \alpha + \eta_0 - \eta_1 \cos \alpha} \tag{5}$$

oder

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{\delta^2}{3} + \frac{\eta_1 (\lambda \cos \alpha + \alpha \sin \alpha) - \eta_0 \lambda}{1 - \cos \alpha} \tag{6}$$

setzen wir $\lambda \cos \alpha + \alpha \sin \alpha = \nu_1$ (siehe 11), so wird

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{\delta^2}{3} + \frac{\eta_1 \nu_1 - \eta_0 \lambda}{1 - \cos \alpha} \tag{7}$$

für $\eta_1 = \eta_0$ ist

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{\eta_0 - \frac{1}{3}\delta^2}{1 + \eta_0} \tag{8}$$

d. h. $(\lambda - \lambda_0)$ unabhängig von α.

Die Reaktion des Widerlagers ist

$$R_1 = \sqrt{H^2 + Q_1^2} \tag{9}$$

dieselbe bildet mit der Fugennormale den Winkel ϑ_1

$$\left(\vartheta_1 > 0 \text{ wenn } \sphericalangle\, OA_1R_1 < \frac{\pi}{2}\right)$$

Es ist

$$\operatorname{tg} \vartheta_1 = \frac{H \sin \alpha - Q_1 \cos \alpha}{H \cos \alpha + Q \sin \alpha} = \frac{\lambda \sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\lambda \cos \alpha + \alpha \sin \alpha} \tag{10}$$

$$= \frac{\alpha - \sin \alpha + (\lambda - \lambda_0) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\lambda_0 + 1 - \cos \alpha + (\lambda - \lambda_0) \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{cotg} \alpha}$$

Soll kein Gleiten eintreten, so muss tg ϑ_1 kleiner als der Reibungskoeffizient der Gewölbsteine sein.

Der ungünstigste Fall ist $\eta_0 = -\delta$, $\eta_1 = \delta$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ alsdann wird

$$\lambda - \lambda_0 = \delta \frac{2\lambda_0 + 1 - \frac{1}{3}\delta}{1 - \delta} = \frac{\delta}{1 - \delta}\left(\pi - 1 - \frac{1}{3}\delta\right)$$

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{\delta}{1-\delta}\left(\pi - 1 - \frac{1}{3}\delta\right)}{\frac{\pi}{2}}$$

setzt man darin z. B. $\delta = 0{,}2$ entsprechend $\frac{d}{a} = \frac{1}{2}$, so wird $\operatorname{tg}\vartheta_1 = 0{,}69$.

Der Reibungskoeffizient beträgt bei gewöhnlichem Gewölbmaterial etwa 0,7, daraus folgt, dass die Zerstörung des Gewölbes durch Gleiten nur in abnorm ungünstigen Fällen in Betracht zu ziehen ist.

Setzt man z. B. $\lambda = \lambda_0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$, so wird

$$\operatorname{tg}\vartheta_1 = 0{,}36.$$

Der Normaldruck auf die Kämpferfuge wird

$$N_1 = H\cos\alpha + Q_1\sin\alpha$$

(11)
$$\frac{N_1}{r\,d\gamma} = \nu_1 = \lambda\cos\alpha + \alpha\sin\alpha$$

$$= \lambda_0 + 1 - \cos\alpha + \frac{\eta_1(\lambda_0 + 1 - \cos\alpha) - \eta_0\lambda_0 - \frac{1}{3}\delta^2(1-\cos\alpha)}{1 - \cos\alpha + \eta_0 - \eta_1\cos\alpha}\cos\alpha$$

(11 a)
$$\nu_0 = \lambda_0 + 1 - \cos\alpha$$

Zur Bestimmung der dem Normaldruck entsprechenden Pressungen an den Fugenkanten sind verschiedene Formeln anzuwenden, je nachdem ein Reissen des Mörtels in Betracht zu ziehen ist oder nicht.

I. Wird die Zugfestigkeit des Mörtels von der Minimalpressung (Maximalspannung) nicht überschritten, so gilt die Formel

(12)
$$p = \frac{N}{d}\left(1 \pm \frac{6y}{d}\right)$$

Das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\\text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen liefert die Pressung an $\left\{\begin{matrix}\text{dem}\\\text{der}\end{matrix}\right\}$ Gewölb- $\left\{\begin{matrix}\text{rücken}\\\text{leibung}\end{matrix}\right\}$

Es ist

(13)
$$\frac{p}{r\gamma} = \nu\left(1 \pm \frac{3\eta}{\delta}\right)$$

II. Ueberschreitet die sich aus (12) ergebende (negative) Pressung die zulässige Zugspannung des Bindemittels, so tritt ein Reissen der Fuge ein. Der Riss wird sich soweit nach innen erstrecken, bis die zulässige Spannung k' erreicht ist.

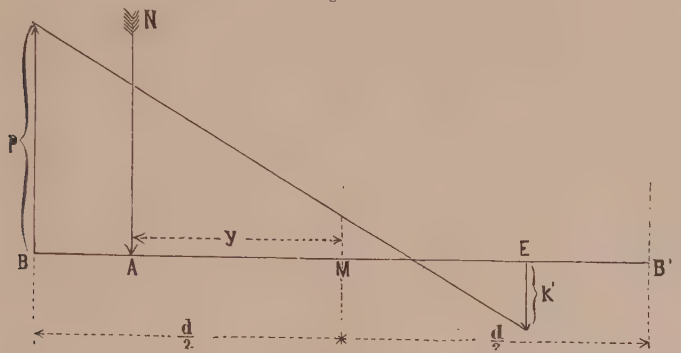
Zur Bestimmung der Pressung an der Fugenkante gegenüber dem Riss haben wir

(14)
$$p = \frac{2}{3}\,\frac{N}{\frac{d}{2} \mp y} - \frac{k'^2}{p - 2k'}$$

Das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\\text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen gilt, wenn $y \gtrless 0$, also die Maximalpressung an $\left\{\begin{matrix}\text{dem Rücken}\\\text{der Leibung}\end{matrix}\right\}$ stattfindet.

Die Herleitung der Formel (14) ist aus Fig. 5 ersichtlich.

Fig. 5.



$BE = b$

$$N = \frac{b}{2}(p - k')$$

$$N\left(\frac{d}{2} \mp y\right) = \frac{1}{2} b\, p\, \frac{b}{3} - \frac{1}{2} b\, k'\, 2\, \frac{b}{3} = \frac{b^2}{6}(p - 2k')$$

$$\frac{2}{3}\,\frac{N}{\frac{d}{2} \mp y} = \frac{(p - k')^2}{p - 2k'} = p + \frac{k'^2}{p - 2k'}$$

k' ist in der Regel sehr klein

bei Kalkmörtel

$$0{,}002 < \frac{k'}{k} < 0{,}07$$

bei Cementmörtel

$$0{,}004 < \frac{k'}{k} < 0{,}13$$

setzt man $k' = \frac{p}{8}$ so wird

$$p = \frac{2}{3}\,\frac{N}{\frac{d}{2} \mp y}\left(1 - \frac{1}{49}\right)$$

Wir können daher k' vernachlässigen, wenn es sich um Bestimmung von p handelt.

Setzen wir in (14) $k' = o$, so ergibt sich daraus

$$\frac{p}{r\gamma} = \frac{4}{3}\,\frac{\nu}{1 \mp \frac{\eta}{\delta}} \qquad \text{oder} \qquad (15)$$

$$\frac{p}{r\gamma} = \nu\left(1 \pm 3\,\frac{\eta}{\delta}\right) + 3\nu\,\frac{\left(\frac{\eta}{\delta} \mp \frac{1}{3}\right)^2}{1 \mp \frac{\eta}{\delta}}$$

(15)

$$= \nu\left(1 \pm 3\,\frac{\eta \pm \zeta}{\delta}\right)$$

wo

$$\zeta = \frac{\left(\eta \mp \frac{\delta}{3}\right)^2}{\delta + \eta}$$

Ist η nahe an $\pm \frac{\delta}{3}$, so geben die Formeln (13) und (15) wenig verschiedene Resultate.

Z. B. Für $\eta = \frac{\delta}{2}$ liefert

(13) $\frac{p}{r\gamma} = \frac{5}{2}\,\nu$; (15) $\frac{p}{r\gamma} = \left(\frac{5}{2} + \frac{1}{6}\right)\nu = \frac{5\nu}{2}\left(1 + \frac{1}{15}\right)$

§. 2.

Der Druckmittelpunkt einer beliebigen Fuge.

Sind η_0 und η_1 gegeben, so können wir η als Funktion von φ bestimmen. Die Horizontalkomponenten von R und R_1 müssen einander gleich und gleich H sein.

Betrachten wir O M als Kämpferfuge des Gewölbstücks $M_0 M$, so ist für dasselbe analog (3)

(16)
$$\frac{H}{r\,d\gamma} = \lambda = \frac{\varphi \sin\varphi + \cos\varphi - 1 + \eta\,\varphi\sin\varphi - \frac{1}{3}\,\delta^2\,(1 - \cos\varphi)}{1 - \cos\varphi + \eta_0 - \eta\cos\varphi}$$

Dieser Werth muss gleich dem λ aus (3) sein; berechnet man also λ nach (3), so ergibt sich mittelst (16) zur Bestimmung von $y = MA$

$$\eta\,(\lambda\cos\varphi + \varphi\sin\varphi) = \lambda + 1 - \cos\varphi - (\lambda\cos\varphi + \varphi\sin\varphi)$$

(17)
$$+ \lambda\eta_0 + \frac{1}{3}\,\delta^2\,(1 - \cos\varphi)$$

Den Normaldruck N auf die Fuge φ erhalten wir analog (11) aus

(18)
$$\frac{N}{r\,d\gamma} = \nu = \lambda\cos\varphi + \varphi\sin\varphi$$

Damit wird

(19)
$$\eta\nu = \lambda + 1 - \cos\varphi - \nu + \lambda\eta_0 + \frac{1}{3}\,\delta^2\,(1 - \cos\varphi).$$

Wir fügen hier gelegentlich bei (ohne im Folgenden Gebrauch davon zu machen), dass die Fugen, für welche η ein Maximum oder Minimum wird, sich ergeben aus

$$o = \nu^2 \frac{\partial \eta}{\partial \varphi} = (1 + \eta_0) \sin \varphi \left[\lambda^2 - \lambda \left(\varphi \operatorname{cotg} \varphi + \frac{\eta_0 - \frac{1}{3}\delta^2}{1 + \eta_0} \right) + (\varphi - \sin \varphi) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left(1 - \frac{\eta_0 - \frac{1}{3}\delta^2}{1 + \eta_0} \right) \right] \tag{20}$$

Es liefert $\varphi = o$ ein Maximum, wenn

$$\lambda < 1 + \frac{\eta_0 - \frac{\delta^2}{3}}{1 + \eta_0}$$

dies trifft in praktischen Fällen stets zu.

Der aus

$$o = \lambda^2 - \lambda \left(\varphi \operatorname{cotg} \varphi + \frac{\eta_0 - \frac{\delta^2}{3}}{1 + \eta_0} \right) + (\varphi - \sin \varphi) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left(1 - \frac{\eta_0 - \frac{1}{3}\delta^2}{1 + \eta_0} \right) \tag{21}$$

berechnete Werth von φ liefert demgemäss ein Minimum, da bei einer eindeutigen und stetigen Funktion nie zwei Maxima ohne zwischenliegendes Minimum auf einander folgen können.

φ aus (21) ist nach den Untersuchungen des Verfassers stets kleiner als 58° 49′ 32″.

Als rohe Annäherung kann bei kleinem δ die Formel

$$\varphi^0 = 100^0 \sqrt{(1 - \lambda_0)(1 - 0{,}72\,(1 - \lambda_0))} \quad \text{dienen.} \tag{22}$$

Für $\alpha = 90^0$ wird z. B. $\lambda_0 = 0{,}571$
Für $\alpha = 60^0$ wird z. B. $\lambda_0 = 0{,}814$ siehe (4); dies liefert
$\varphi = 55^0{,}5$
$\varphi = 40^0{,}3$ bei mathematischer Gewölbstärke (§. 6 III.) wird nach den genauen Formeln

$$\lambda = 0{,}621 \quad \text{und} \quad \varphi = 54^0{,}45$$
$$\lambda = 0{,}825 \quad \varphi = 39^0{,}44.$$

§. 3.

Die Fugen, in welchen bei gegebener Druckkurve die grössten Pressungen stattfinden (Bruchfugen).

Bei Bestimmung der Bruchfugen sind die Fälle entsprechend den Formeln (13) und (15) getrennt zu behandeln.

I. Es ist keine Gefahr für ein Reissen in den Bruchfugen vorhanden.

Ist $k' = o$, so liegt alsdann der Druckmittelpunkt der Bruchfuge im mittleren Fugendrittel.

In diesem Falle gilt die Formel (13); setzen wir darin η aus (17) und v aus (18) ein, so wird:

$$\frac{p}{r\gamma} = \lambda \cos\varphi + \varphi \sin\varphi \pm \frac{3}{\delta}\left[\lambda + 1 - \cos\varphi - (\lambda \cos\varphi + \varphi \sin\varphi) + \lambda\eta_0 + \frac{1}{3}\delta^2(1 - \cos\varphi)\right]$$

oder

$$\frac{p\delta}{3r\gamma} = \mp\left[(\lambda \cos\varphi + \varphi \sin\varphi)\left(1 \mp \frac{\delta}{3}\right) - \lambda - 1 + \cos\varphi - \lambda\eta_0 - \frac{1}{3}\delta^2(1 - \cos\varphi)\right] \tag{23}$$

p wird ein Maximum oder Minimum, wenn φ bestimmt wird aus

$$o = \frac{\delta}{3r\gamma}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \mp\left[(-\lambda \sin\varphi + \varphi\cos\varphi)\left(1 \mp \frac{\delta}{3}\right) \mp \frac{1}{3}(\delta \pm \delta^2)\sin\varphi\right]$$

$$= \mp \sin\varphi\left(1 \mp \frac{\delta}{3}\right)\left[-\lambda + \varphi \operatorname{cotg}\varphi \mp \frac{\delta}{3}\frac{1 \mp \delta}{1 \mp \frac{1}{3}\delta}\right] \tag{24}$$

Daraus folgt

$$\sin\varphi = o$$

und

$$\varphi \operatorname{cotg}\varphi = \lambda \pm \frac{\delta}{3}\frac{1 \pm \delta}{1 \mp \frac{1}{3}\delta} \tag{25}$$

Der in Betracht kommende Winkel φ wird stets zwischen o und $\frac{\pi}{2}$ liegen; wir erhalten also in der einen Gewölbhälfte nur zwei Werthe von φ, welchen Maximal- oder Minimalpressungen entsprechen.

Für sehr kleine Werthe von φ wird

$$\frac{\delta}{3r\gamma}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \mp\varphi\left(1 \mp \frac{\delta}{3}\right)\left[-\lambda + 1 \mp \frac{\delta}{3} \cdot \frac{1 \pm \delta}{1 \mp \frac{1}{3}\delta}\right]$$

Der Ausdruck in $[\ ]$ ist $> o$, so lange

$$\lambda < 1 \mp \frac{\delta}{3}\frac{1 \pm \delta}{1 \mp \frac{1}{3}\delta}$$

Dies tritt in allen praktischen Fällen ein. Im ungünstigsten Falle (Scheitrechtes Gewölbe) wird $[\ ] = o$.

Für das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\\text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen haben wir ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ von p für $\varphi = o$.

Es findet also für $\varphi = o$ am Gewölbrücken eine grösste, an der Leibung eine kleinste Pressung statt.

Der sich aus (25) ergebende Werth von φ liefert für das $\left\{\begin{matrix}\text{obere}\\\text{untere}\end{matrix}\right\}$ Zeichen ein $\left\{\begin{matrix}\text{Minimum}\\\text{Maximum}\end{matrix}\right\}$, denn es können bei einer eindeutigen und stetigen Funktion nie zwei $\left\{\begin{matrix}\text{Maxima}\\\text{Minima}\end{matrix}\right\}$ auf einander folgen.

Die Pressung ist also $\left\{\begin{matrix}\text{am Rücken}\\\text{an der Leibung}\end{matrix}\right\}$ im Scheitel ein $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}\right\}$ und nimmt $\left\{\begin{matrix}\text{ab}\\\text{zu}\end{matrix}\right\}$ bis zu der sich aus $\left(25 \begin{matrix}\text{oberes}\\\text{unteres}\end{matrix} \text{ Zeichen}\right)$ ergebenden Bruchfuge φ, von da aus nimmt die Pressung gegen die Kämpferfuge hin $\left\{\begin{matrix}\text{zu}\\\text{ab}\end{matrix}\right\}$.

(25 unteres Zeichen) liefert einen grösseren Werth von φ als (25 oberes Zeichen).

Wird $\varphi > \alpha$, so haben wir $\left\{\begin{matrix}\text{am Rücken}\\\text{an der Leibung}\end{matrix}\right\}$ im Scheitel ein Pressungs- $\left\{\begin{matrix}\text{Maximum}\\\text{Minimum}\end{matrix}\right\}$; von da an nimmt die Pressung bis zur Kämpferfuge hin $\left\{\begin{matrix}\text{ab}\\\text{zu}\end{matrix}\right\}$.

In der Regel ist $\varphi < \alpha$ (wenigstens in praktischen Fällen), denn aus (25) und (4) folgt:

$$\varphi \operatorname{cotg} \varphi = \alpha \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} - 1 + \lambda - \lambda_0 \pm \frac{\delta}{3} \frac{1 \pm \delta}{1 \mp \frac{\delta}{3}}$$

ist $\varphi < \alpha$, so ist $\varphi \operatorname{cotg} \varphi > \alpha \operatorname{cotg} \alpha$.

Es sei

$$\varphi \operatorname{cotg} \varphi = \alpha \operatorname{cotg} \alpha + \triangle$$

alsdann wird $\varphi \lessgtr \alpha$, je nachdem $\triangle \gtrless 0$;
nun ist

$$\triangle = \alpha \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} - 1 - \alpha \operatorname{cotg} \alpha + \lambda - \lambda_0 \pm \frac{\delta}{3} \frac{1 \pm \delta}{1 \mp \frac{\delta}{3}}$$

$$= \frac{\alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha} + \lambda - \lambda_0 \pm \frac{\delta}{3} \frac{1 \pm \delta}{1 \mp \frac{\delta}{3}}$$

Damit ist nachgewiesen, dass in der Regel $\triangle > o$, d. h. $\varphi < \alpha$ ist.

Ist $\varphi < \alpha$, so gibt es in der Gewölbhälfte 3 Stellen (Bruchfugen), an welchen das Gewölbe durch Druck zerstört werden könnte.

1) In der Scheitelfuge am Rücken.
2) In der Bruchfuge φ (aus 25 unteres Zeichen) an der Leibung.
3) In der Kämpferfuge am Rücken.

Ein Zerreissen kann eventuell eintreten in der Scheitel- und Kämpferfuge, an der Leibung und in der Bruchfuge φ (aus 25 oberes Zeichen) am Rücken.

II. Es tritt ein Reissen in den Bruchfugen ein.

Ist $k' = o$, so liegt alsdann der Druckmittelpunkt der Bruchfugen in einem der äusseren Fugendrittel.

Für $k' = o$ gilt die Formel (15).

$$\frac{p}{r\gamma} = \frac{4}{3}\,\frac{\nu}{1 \mp \frac{\eta}{\delta}} = \frac{4}{3}\,\frac{\lambda \cos\varphi + \varphi \sin\varphi}{1 \mp \frac{\eta}{\delta}} \tag{15}$$

$\left\{\begin{matrix}\text{oberes}\\ \text{unteres}\end{matrix}\right\}$ Zeichen, wenn $\eta \gtrless o$.

Die Pressung wird am grössten, wenn

$$o = (\delta \mp \eta)^2\,\frac{3}{4r\delta\gamma}\cdot\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{\partial \nu}{\partial \varphi}(\delta \mp \eta) \pm \nu\,\frac{\partial \eta}{\partial \varphi}$$

oder da

$$\frac{\partial \nu\eta}{\partial \varphi} = \nu\,\frac{\partial \eta}{\partial \varphi} + \eta\,\frac{\partial \nu}{\partial \varphi}$$

$$(\delta \mp \eta)^2\,\frac{3}{4r\delta\gamma}\cdot\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \mp\left[\frac{\partial \nu\eta}{\partial \varphi} - (2\eta \mp \delta)\,\frac{\partial \nu}{\partial \varphi}\right]$$

nun ist nach (19)

$$\frac{\partial \nu\eta}{\partial \varphi} = \sin\varphi - \frac{\partial \nu}{\partial \varphi} + \frac{1}{3}\,\delta^2 \sin\varphi$$

und nach (18)

$$\frac{\partial \nu}{\partial \varphi} = \varphi \cos\varphi + \sin\varphi - \lambda \sin\varphi$$

damit wird

$$(\delta \mp \eta)^2\,\frac{3}{4r\delta\gamma}\cdot\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \pm \sin\varphi\,(1 + 2\eta \mp \delta)\left[\lambda - \varphi\,\operatorname{cotg}\varphi - \frac{2\eta \mp \delta - \frac{1}{3}\delta^2}{1 + 2\eta \mp \delta}\right] \tag{26}$$

Ein Maximum oder Minimum von p erhalten wir somit für

$$\sin\varphi = o$$

und für

$$\varphi\,\operatorname{cotg}\varphi = \lambda - \frac{2\eta \mp \delta - \frac{1}{3}\delta^2}{1 + 2\eta \mp \delta} \tag{27}$$

für kleine Werthe von φ wird

$$(\delta \mp \eta)^2 \frac{3}{4 r \delta \gamma} \frac{\partial p}{\partial \varphi} = \mp \varphi (1 + 2\eta \mp \delta) \left[-\lambda + 1 + \frac{2\eta \mp \delta - \frac{1}{3}\delta^2}{1 + 2\eta \mp \delta} \right]$$

Da $\lambda < 1$ ist, so liefert für $\varphi = 0$ das $\left\{ \begin{matrix} \text{obere} \\ \text{untere} \end{matrix} \right\}$ Zeichen ein $\left\{ \begin{matrix} \text{Maximum} \\ \text{Minimum} \end{matrix} \right\}$ von p.

Hier gelten die nämlichen Betrachtungen, wie unter §. 3 I., nur ist (27) statt (25) zu setzen.

Die rechte Seite der Gleichung (27) enthält η; soll φ berechnet werden, so ist zunächst ein angenäherter Werth von φ zu ermitteln und η mittelst (19) zu berechnen. Durch allmälige Annäherung erhält man den genauen Werth von φ. Da η klein ist, so ergibt sich bald ein genügend genauer Werth von φ.

§. 4.

Der Horizontalschub, welcher gleiche Maximalpressungen in der Scheitel- und Kämpferfuge zur Folge hat.

I. Es ist kein Reissen in Betracht zu ziehen.

Die Maximalpressungen sind in beiden Fugen am Rücken (§. 3), also gilt das obere Zeichen. Es wird nach (13), wenn wir den sich ergebenden Werth von λ mit λ' bezeichnen.

$$\frac{p_0 \delta}{3 r \gamma} = \left(\frac{1}{3} \delta + \eta_0 \right) \lambda' \tag{28}$$

$$\frac{p_1 \delta}{3 r \gamma} = \left(\frac{1}{3} \delta + \eta_1 \right) (\lambda' \cos \alpha + \alpha \sin \alpha) \tag{29}$$

aus $p_0 = p_1$ folgt:

$$\left(\frac{\delta}{3} + \eta_0 \right) \lambda' = \left(\frac{\delta}{3} + \eta_1 \right) (\lambda' \cos \alpha + \alpha \sin \alpha)$$

oder

$$\eta_0 \lambda' - \eta_1 (\lambda' \cos \alpha + \alpha \sin \alpha) = \frac{\delta}{3} [\alpha \sin \alpha - \lambda' (1 - \cos \alpha)] \tag{30}$$

Dies gibt in Verbindung mit (6)

$$\lambda' = \lambda_0 - \frac{\delta}{3} \cdot \frac{1 + \delta}{1 - \frac{\delta}{3}} \tag{31}$$

somit $\lambda' - \lambda_0$ unabhängig von α.

Ia. Es tritt ein Reissen in der Scheitelfuge ein, aber nicht in der Kämpferfuge. (Ia. kommt zur Anwendung, wenn in der Bruchfuge φ kein Reissen eintritt. Vergl. IIa. und §. 5.)

Nach (15) ist in diesem Falle

$$\frac{p_0}{r\gamma} = \frac{4}{3}\,\frac{\lambda\,\delta}{\delta - \eta_0} = \lambda\left(1 + 3\,\frac{\eta_0 + \zeta_0}{\delta}\right)$$

wo

$$\zeta_0 = \frac{\left(\eta_0 - \frac{\delta}{3}\right)^2}{\delta - \eta_0}$$

Für p_1 gilt (29).

Setzen wir in (30) $\eta_0 + \zeta_0$ für η_0 ein, so wird

$$\lambda'' = \lambda_0 - \frac{\delta}{3}\,\frac{1 + \delta}{1 - \frac{\delta}{3}} + \frac{\lambda\,\zeta_0}{\left(1 - \frac{\delta}{3}\right)(1 - \cos\alpha)} \tag{32}$$

Ist p gegeben, so setzen wir η_0 aus

$$\frac{p}{r\gamma} = \frac{4}{3}\,\frac{\lambda''\,\delta}{\delta - \eta_0}$$ in die Formel für ζ_0 ein.

Es wird

$$\zeta_0 = \frac{\delta}{3}\,\frac{r\gamma}{p\lambda}\left(\frac{p}{r\gamma} - 2\lambda''\right)^2 \tag{33}$$

und

$$\lambda'' = \lambda_0 - \delta\,\frac{1 + \delta}{1 - \frac{\delta}{3}} + \frac{\delta}{3 - \delta}\cdot\frac{r\gamma}{p}\,\frac{\left(\frac{p}{r\gamma} - 2\lambda''\right)^2}{1 - \cos\alpha} \tag{34}$$

$$= \lambda' + \frac{\delta}{3 - \delta}\,\frac{r\gamma}{p}\,\frac{\left(\frac{p}{r\gamma} - 2\lambda''\right)^2}{1 - \cos\alpha}$$

Ist p nicht gegeben, so erhält man λ'' durch allmälige Annäherung (vergl. §. 5).

II. Es tritt in beiden Fugen ein Reissen ein.

Alsdann ist nach (15)

$$\frac{3}{4}\,\frac{p}{r\delta\gamma} = \frac{\lambda'}{\delta - \eta_0} = \frac{\lambda'\cos\alpha + \alpha\sin\alpha}{\delta - \eta_1} \tag{35}$$

Daraus folgt

$$\eta_0\,\lambda' - \eta_1\,(\lambda'\cos\alpha + \alpha\sin\alpha) = [\alpha\sin\alpha - \lambda'(1 - \cos\alpha)]\,(\delta - \eta_0 - \eta_1).$$

Dies gibt in Verbindung mit (6)

$$\lambda' = \lambda_0 + \frac{\eta_0 + \eta_1 - \delta - \frac{1}{3}\,\delta^2}{1 + \eta_0 + \eta_1 - \delta} \tag{36}$$

$$= \lambda_0 - \frac{\delta}{3}\,\frac{1 + \delta}{1 - \frac{\delta}{3}} + \frac{\left(\eta_0 + \eta_1 - \frac{2}{3}\,\delta\right)\left(1 + \frac{1}{3}\,\delta^2\right)}{\left(1 - \frac{\delta}{3}\right)(1 + \eta_0 + \eta_1 - \delta)}$$

für

$$\frac{\eta_0 + \eta_1}{2} = \frac{\delta}{3}$$ geht (36) in (31) über.

Wir können $\eta_0 + \eta_1 - \delta$ als Funktion von p darstellen, es wird mit Rücksicht auf (35)

$$\eta_0 + \eta_1 - \delta = \delta \left\{1 - \frac{4 r\gamma}{3p} [\lambda' (1 + \cos \alpha) + \alpha \sin \alpha]\right\} \quad (37)$$

$$= \delta \left\{1 - \frac{4 r\gamma}{3p} [2 \lambda_0 + 1 - \cos \alpha + (\lambda' - \lambda_0)(1 + \cos \alpha)]\right\}$$

Mit Hülfe von (37) lässt sich durch allmälige Annäherung ein genügend genauer Werth von λ' bestimmen (vergl. §. 5).

IIa. Es tritt ein Reissen in der Scheitelfuge ein, aber nicht in der Kämpferfuge. (IIa. kommt zur Anwendung, wenn ein Reissen der Bruchfuge φ eintritt, vergl. Ia und §. 5.)

Es ist mit Rücksicht auf (13) und (15)

$$\frac{4}{3} \frac{r\gamma}{p} \delta = \frac{\delta - \eta_0}{\lambda} = \frac{4}{3} \delta \frac{1}{\left(1 + \frac{3\eta_1}{\delta}\right)(\lambda \cos \alpha + \alpha \sin \alpha)} \quad (38)$$

$$= \frac{\delta - \eta_1 + \frac{1}{3} \frac{(\delta - 3\eta_1)^2}{\delta + 3\eta_1}}{\lambda \cos \alpha + \alpha \sin \alpha} = \frac{\delta - (\eta_1 - \zeta_1)}{\lambda \cos \alpha + \alpha \sin \alpha}$$

wo

$$\zeta_1 = \frac{1}{3} \frac{(\delta - 3\eta_1)^2}{\delta + 3\eta_1}$$

Entsprechend (36) erhalten wir

$$\lambda'' = \lambda_0 + \frac{\eta_0 + \eta_1 - \delta - \frac{\delta^2}{3} - \frac{\zeta_1 \lambda''}{1 - \cos \alpha}}{1 + \eta_0 + \eta_1 - \delta} \quad (39)$$

Aus $$\frac{p}{r\gamma} = \frac{\nu_1}{\delta}(\delta + 3\eta_1)$$ folgt

$$\zeta_1 = \frac{\delta}{3} \frac{r\gamma}{p\nu_1} \left(2\nu_1 - \frac{p}{r\gamma}\right)^2 \quad (40)$$

und

$$\lambda'' = \lambda_0 + \frac{\eta_0 + \eta_1 - \delta - \frac{1}{3}\delta^2 - \frac{\delta}{3} \frac{\lambda}{\nu_1} \frac{r\gamma}{p} \frac{\left(2\nu_1 - \frac{p}{r\gamma}\right)^2}{1 - \cos \alpha}}{1 + \eta_0 + \eta_1 - \delta} \quad (41)$$

Für $\eta_0 + \eta_1 - \delta$ gilt (37) mit λ'' statt λ'.

§. 5.

Die Maximalpressung in der zwischen Scheitel- und Kämpferfuge liegenden Bruchfuge gleich den Maximalpressungen in ersteren.

I. Es ist kein Reissen in der Bruchfuge φ in Betracht zu ziehen.

λ ergibt sich aus (31), beziehungsweise (34), wenn ein Reissen in der Scheitelfuge eintritt.

In der Fuge φ findet die grösste Pressung an der Leibung statt.

Der Winkel φ bestimmt sich aus (25) unteres Zeichen oder

$$\varphi \operatorname{cotg} \varphi = \lambda - \frac{\delta}{3} \frac{1 - \delta}{1 + \frac{\delta}{3}} \tag{42}$$

Für λ ist λ' oder λ'' aus (31) oder (34) einzusetzen, damit wird

$$\varphi \operatorname{cotg} \varphi = \lambda_0 - \frac{2}{3} \delta \frac{1 + \frac{1}{3} \delta^2}{1 - \frac{1}{9} \delta^2} + (\lambda'' - \lambda') \text{ eventuell.}$$

Setzt man λ aus (42) in (23 unteres Zeichen) ein, so wird nach geeigneter Umformung

$$\frac{p \delta}{3 r \gamma} = (\varphi - \sin \varphi) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left(1 + \frac{\delta}{3}\right) + \left(\frac{\delta}{3} - \eta_0\right) \lambda \tag{43}$$

findet in der Scheitelfuge kein Reissen statt, so ist $\lambda = \lambda'$ und nach (13)

$$\frac{p \delta}{3 r \gamma} = \left(\frac{\delta}{3} + \eta_0\right) \lambda' \tag{44}$$

Durch Addition von (43) und (44) ergibt sich

$$\frac{p \delta}{3 r \gamma} = \frac{1}{2} (\varphi - \sin \varphi) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \left(1 + \frac{\delta}{3}\right) + \frac{1}{3} \delta \lambda'$$

oder

$$\frac{p}{r \gamma} = \lambda' + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{\delta} + 1\right) (\varphi - \sin \varphi) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \tag{45}$$

Zwischen der Maximalpressung p und der Minimalpressung p' einer Fuge besteht die Beziehung [vergl. (13)].

$$\frac{p}{r \gamma} + \frac{p'}{r \gamma} = 2 \nu \tag{46}$$

Es wird daher:

In der Scheitelfuge

$$\frac{p'_0}{r \gamma} = 2 \lambda' - \frac{p}{r \gamma} \tag{47}$$

In der Bruchfuge φ

$$\frac{p'}{r\gamma} = 2\nu - \frac{p}{r\gamma} \tag{48}$$

In der Kämpferfuge

$$\frac{p_1'}{r\gamma} = 2\nu_1 - \frac{p}{r\gamma} \tag{49}$$

In (48) ist für φ der sich aus (42) ergebende Werth einzusetzen.

Ia. Da stets $\nu > \lambda'$, so wird die Pressung p_0' am kleinsten; das Reissen tritt somit bei der von uns betrachteten Druckkurve zuerst in der Scheitelfuge ein, wenn $p_0' < -k'$ alsdann gilt anstatt (44), das aus (15) sich ergebende (50).

$$\frac{p\delta}{3r\gamma} = \left(\frac{\delta}{3} + \eta_0 + \zeta_0\right)\lambda'' \tag{50}$$

verbinden wir dies mit (43), so wird

$$\frac{p}{r\gamma} = \lambda''\left(1 + \frac{3}{2}\frac{\zeta_0}{\delta}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\delta} + 1\right)(\varphi - \sin\varphi)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \tag{51}$$

oder mittelst (33)

$$\frac{p}{r\gamma} = \lambda'' + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\delta} + 1\right)(\varphi - \sin\varphi)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\frac{r\gamma}{p}\left(\frac{p}{r\gamma} - 2\lambda''\right)^2$$

Daraus folgt $\frac{p}{r\gamma}$ durch allmälige Annäherung.

Statt (51) können wir auch schreiben

$$\frac{p}{r\gamma} = \left(\frac{3}{\delta} + 1\right)(\varphi - \sin\varphi)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} - 2\lambda''\left(1 - \frac{2\lambda'' r\gamma}{p}\right)$$

Dies führt jedoch weniger rasch auf den genauen Werth von $\frac{p}{r\gamma}$.

II. Es tritt ein Reissen in der Bruchfuge φ ein. Tritt das Reissen in sämmtlichen Bruchfugen ein, so gilt λ' aus (36), der Winkel φ wird bestimmt aus (27 unteres Zeichen) oder

$$\varphi\operatorname{cotg}\varphi = \lambda' - \frac{2\eta + \delta - \frac{1}{3}\delta^2}{1 + 2\eta + \delta} = \lambda' + \varepsilon \tag{52}$$

wo

$$\varepsilon = -\frac{2\eta + \delta - \frac{1}{3}\delta^2}{1 + 2\eta + \delta}$$

Zur Vergleichung mit (42) können wir (52) schreiben

$$\varphi\operatorname{cotg}\varphi = \lambda - \frac{\delta}{3}\frac{1 - \delta}{1 + \frac{1}{3}\delta} - 2\frac{\left(\eta + \frac{\delta}{3}\right)\left(1 + \frac{\delta^2}{3}\right)}{(1 + 2\eta + \delta)\left(1 + \frac{\delta}{3}\right)}$$

setzen wir $\lambda' = \varphi \operatorname{cotg} \varphi - \varepsilon$ aus (52) in (17) ein, so wird

$$\eta \left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} - \varepsilon \cos \varphi \right) = - (1 - \cos \varphi) \left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 + \varepsilon - \frac{1}{3} \delta^2 \right) + \lambda \eta_0$$

oder

$$\eta \left[\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 2 (1 - \cos \varphi) - \varepsilon \cos \varphi \right] = - \left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 \right) (1 - \cos \varphi)$$
$$- \left(\varepsilon + 2 \eta + \delta - \frac{\delta^2}{3} \right) (1 - \cos \varphi)$$
$$+ \eta_0 \lambda + \delta (1 - \cos \varphi)$$

nun ist

$$\varepsilon + 2 \eta + \delta - \frac{\delta^2}{3} = \frac{(2 \eta + \delta) \left(2 \eta + \delta - \frac{\delta^2}{3} \right)}{1 + 2 \eta + \delta}$$
$$= - (2 \eta + \delta) \varepsilon$$

und es wird

$$\eta \left[\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 2 (1 - \cos \varphi) - \varepsilon (2 - \cos \varphi) \right] = - \left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 \right) (1 - \cos \varphi)$$
$$+ \eta_0 \lambda + \delta (1 + \varepsilon) (1 - \cos \varphi).$$

Die Bedingung, dass die Maximalpressungen in Scheitel- und Bruchfuge einander gleich werden, ist nach (15)

$$\frac{4}{3} \frac{r \gamma \delta}{p} = \frac{\delta - \eta_0}{\lambda} = \frac{\delta + \eta}{\lambda \cos \varphi + \varphi \sin \varphi}$$
$$= \left\{ \delta \left[\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 2 (1 - \cos \varphi) - \varepsilon (2 - \cos \varphi) \right] - \left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 \right) \right.$$
$$\left. (1 - \cos \varphi) + \lambda \eta_0 + \delta (1 + \varepsilon) (1 - \cos \varphi) \right\} : \left\{ (\lambda \cos \varphi + \varphi \sin \varphi) \right.$$
$$\left. \left[\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 2 (1 - \cos \varphi) - \varepsilon (2 - \cos \varphi) \right] \right\}$$

wenn wir den Werth von η einsetzen.

Dies ist auch gleich $\frac{\delta \lambda - \eta_0 \lambda}{\lambda_1^2}$; addirt man die Zähler und die Nenner und setzt λ aus (52) ein, so wird

$$\frac{4 r \gamma \delta}{3 p} = \frac{\delta \left[\varphi \operatorname{cotg} \varphi + \frac{\varphi}{\sin \varphi} - (1 - \cos \varphi) - 2 \varepsilon \right] - \left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 1 \right) (1 - \cos \varphi)}{\left(\frac{\varphi}{\sin \varphi} - \varepsilon \cos \varphi \right) \left[\frac{\varphi}{\sin \varphi} - 2 (1 - \cos \varphi) - \varepsilon (2 - \cos \varphi) \right] + (\varphi \operatorname{cotg} \varphi - \varepsilon)^2}$$

nun ist $\frac{1}{\delta} = \frac{2 a}{d} + 1$

damit wird

$$\frac{4r\gamma}{3p}=\frac{\varphi\cot g\,\varphi-\varepsilon-\frac{a}{d}(\varphi-\sin\varphi)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\frac{1}{2}\frac{\varphi^2}{\sin^2\varphi}(1+\cos^2\varphi)-\varphi\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}-\varepsilon\left[\varphi\cot g\frac{\varphi}{2}-\cos\varphi+\cos^2\varphi-\varepsilon\left(1-\frac{(1-\cos)^2}{2}\right)\right]}$$

oder

$$\frac{4r\gamma}{3p}\left(\frac{\varphi^2}{2}+\varphi^2\cot g^2\varphi-\varphi\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)=\lambda'-\frac{a}{d}(\varphi-\sin\varphi)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$$
$$+\varepsilon\frac{4r\gamma}{3p}\left[\varphi\cot g\frac{\varphi}{2}-\cos\varphi+\cos^2\varphi-\varepsilon\left(1-\frac{(1-\cos\varphi)^2}{2}\right)\right] \quad (53)$$

Aus

$$\frac{4r\gamma}{3p}=\frac{\delta+\eta}{\lambda\cos\varphi+\varphi\sin\varphi}\text{ und }\varepsilon=-\frac{2\eta+\delta-\frac{1}{3}\delta^2}{1+2\eta+\delta}$$

folgt

$$\varepsilon\left[\frac{2a}{d}+\frac{8}{3}\frac{r\gamma}{p}(\lambda\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)\right]=1-\frac{8}{3}\frac{r\gamma}{p}(\lambda\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)+\frac{\delta}{3} \quad (54)$$

Der genaue Werth von $\frac{4}{3}\frac{r\gamma}{p}$ und damit von $\frac{p}{r\gamma}$ ergibt sich durch allmälige Annäherung.

IIa. Es tritt ein Reissen in der Scheitel- und Bruchfuge φ ein, aber nicht in der Kämpferfuge.

In diesem Falle tritt λ'' aus (41) an die Stelle von λ' aus (36). Die Pressung ergibt sich, wenn wir in (53) und (54) λ'' statt λ' schreiben.

§. 6.

Die Gewölbstärke bei vorgeschriebener Maximalpressung.

I. Entsprechend I. §. 5 wird nach (45)

$$\frac{a}{d}=\frac{1}{3}\left\{\frac{\frac{p}{r\gamma}-\lambda'}{(\varphi-\sin\varphi)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}-2\right\} \quad (55)$$

wo λ' und φ sich aus (31) und (42) ergeben, und zwar durch allmälige Annäherung.

Ia. Entsprechend Ia. §. 5 wird nach (51)

$$\frac{a}{d}=\frac{1}{3}\left\{\frac{\frac{p}{r\gamma}-\lambda''-\frac{1}{2}\frac{r\gamma}{p}\left(\frac{p}{r\gamma}-2\lambda''\right)^2}{(\varphi-\sin\varphi)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}-2\right\} \quad (56)$$

II. Entsprechend II. §. 5 wird nach (53)

$$\frac{a}{d}(\varphi - \sin\varphi)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \lambda' - \frac{4r\gamma}{3p}\left(\frac{\varphi^2}{2} + \varphi^2\operatorname{cotg}^2\varphi - \varphi\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right)$$

$$(57)\qquad + \frac{4r\gamma}{3p}\varepsilon\left[\varphi\operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi + \cos^2\varphi - \varepsilon\left(1 - \frac{(1-\cos\varphi)^2}{2}\right)\right]$$

wo λ', φ und ε sich aus (36), (37), (52) und (54) ergeben.

IIa. Entsprechend IIa. §. 5 gilt (57), wenn wir darin λ'' aus (41) an die Stelle von λ' setzen.

Im Falle I. und Ia. ist die Berechnung der Pressung bei gegebener Gewölbstärke einfacher als die Berechnung der Gewölbstärke bei gegebener Pressung.

Im Falle II. und IIa. umgekehrt.

III. Die sogenannte mathematische Gewölbstärke ergibt sich aus (57), wenn wir darin $p = \infty$ setzen.

Es wird

$$(58)\qquad \frac{a}{d} = \frac{\lambda'}{(\varphi - \sin\varphi)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}$$

ferner ist $\eta_0 = \delta$, $\eta_1 = \delta$, $\eta = -\delta$; dies liefert nach (36)

$$(59)\qquad \lambda' = \lambda_0 + \delta\,\frac{1 - \frac{1}{3}\delta}{1 + \delta}$$

und nach (52)

$$(60)\qquad \varphi\operatorname{cotg}\varphi = \lambda' + \delta\,\frac{1 + \frac{1}{3}\delta}{1 - \delta} = \lambda_0 + 2\delta\,\frac{1 + \frac{1}{3}\delta^2}{1 - \delta^2}$$

§. 7.

Die Druckkurve und die Maximalpressungen in einem Gewölbe, welches keine Bruchfuge zwischen Scheitel- und Kämpferfuge hat.

Unmittelbar nach der Ausschalung des Gewölbes ist im vorliegenden Falle $\eta_0 = \delta$ und $\eta_1 = -\delta$. Die Druckmittelpunkte A_0 und A_1 nähern sich so lange den Fugenmitten M_0 und M_1, bis bei gleicher Maximalpressung in OM_0 und OM_1 eine weitere Verschiebung von A_0 und A_1 eine Vermehrung der Maximalpressung zur Folge hat (vergl. auch die hieher gehörige Bemerkung unter §. 3 I.).

Für die Pressung in der Scheitelfuge am Rücken ist

$$\frac{p_0}{r\gamma} = \lambda\left(1 + \frac{3\eta_0}{\delta}\right)$$

Dieselbe wird ein Minimum, wenn

$$o = \frac{1}{r\gamma}\frac{\partial p}{\partial \eta_0} = \frac{\partial \lambda}{\partial \eta_0}\left(1 + \frac{3\eta_0}{\delta}\right) + \frac{3\lambda}{\delta} \qquad (61)$$

Aus (5) oder (6) folgt

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \eta_0} = -\frac{\lambda}{1 - \cos\alpha + \eta_0 - \eta_1 \cos\alpha} \qquad (62)$$

Aus (61) und (62) ergibt sich

$$\eta_1 = \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha} - \frac{\delta}{3\cos\alpha} \qquad (63)$$

(63) ist nur anwendbar, wenn $\eta_1 < o$, weil sonst die grösste Pressung in der Kämpferfuge am Rücken stattfindet, oder wenn

$$\frac{\delta}{3} > 1 - \cos\alpha$$

d. h. wenn die Horizontale durch M_1 die Scheitelfuge im mittleren Fugendrittel trifft.

Ist die Pressung in der Scheitelfuge am Rücken gleich der Pressung in der Kämpferfuge an der Leibung oder ist

$$p_0 = p_1$$

so folgt aus

(vgl. 13) $$\lambda\left(1 + \frac{3\eta_0}{\delta}\right) = (\lambda\cos\alpha + \alpha\sin\alpha)\left(1 - \frac{3\eta_1}{\delta}\right) \qquad (63a)$$

durch Einsetzung von η_1 aus (63)

$$\eta_0 = \frac{\delta}{3}\cos\alpha - 1 + \cos\alpha - \frac{\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\lambda}\left[(1 + \cos\alpha)\frac{\delta}{3} - 1 + \cos\alpha\right] \qquad (64)$$

wo

$$\frac{\alpha\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\lambda}\left[\ \ \right] > o \quad \text{wegen } \eta_1 < o$$

(63) und (64) sind nur anwendbar, wenn $\eta_0 > o$ und $\eta_1 < o$.

Für die Pressung in der Kämpferfuge an der Leibung ist nach (13)

$$\frac{p_1}{r\gamma} = (\lambda\cos\alpha + \alpha\sin\alpha)\left(1 - \frac{3\eta_1}{\delta}\right)$$

p_1 wird ein Minimum, wenn

$$o = \frac{1}{r\gamma}\frac{\partial p_1}{\partial \eta_1} = \frac{\partial \lambda}{\partial \eta_1}\cos\alpha\left(1 - \frac{3\eta_1}{\delta}\right) + (\lambda\cos\alpha + \alpha\sin\alpha)\left(-\frac{3}{\delta}\right) \qquad (65)$$

Aus (5) oder (6) folgt

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \eta_1} = \frac{\lambda\cos\alpha + \alpha\sin\alpha}{1 - \cos\alpha + \eta_0 - \eta_1\cos\alpha} \qquad (66)$$

Aus (66) und (65) ergibt sich

(67) $$\eta_0 = \frac{\delta}{3} \cos \alpha - 1 + \cos \alpha$$

(67) ist nur anwendbar, wenn $\eta_0 > 0$ oder $\frac{\delta}{3} > \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha}$, d. h. wenn die horizontale durch M_0 die Kämpferfuge im mittleren Fugendrittel trifft.

Ist $p_0 = p_1$, so wird, wenn wir η_0 aus (67) in (63 a) einsetzen

$$\eta_1 (\lambda \cos \alpha + \alpha \sin \alpha) = - \frac{\delta}{3} (\lambda - \alpha \sin \alpha) + \lambda (1 - \cos \alpha)$$

oder (68)

$$\eta_1 = \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\delta}{3 \cos \alpha} + \frac{\alpha \operatorname{tg} \alpha}{\lambda \cos \alpha + \alpha \sin \alpha} \left[(1 + \cos \alpha) \frac{\delta}{3} - 1 + \cos \alpha \right]$$

(67), (68) ist nur anwendbar, wenn η_1 negativ. λ (69) entsprechend, η_0 und η_1 aus (67) und (68) wird gleich λ entsprechend η_0 und η_1 aus (63), (64). Da nun η_1 (68) $> \eta_1$ (63), so wird die Pressung entsprechend (67), (68) kleiner als die Pressung entsprechend (63), (64).

Die Kurve kleinster Maximalpressungen ist somit bestimmt durch (67) und (68).

Es wird

(69) $$\lambda = \frac{\lambda_0 \left(1 + \frac{\delta}{3}\right) + \frac{\delta}{3} (1 - \delta)}{\frac{\delta}{3} \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$$

und damit

(70) $$\frac{p}{r \gamma} = (1 - \cos \alpha) \left[\lambda_0 \left(\frac{3}{\delta} + 1 \right) + 1 - \delta \right]$$

$$= (1 - \cos \alpha) \lambda_0 \frac{3}{\delta} + \alpha \sin \alpha - \delta (1 - \cos \alpha)$$

Für das scheitrechte Gewölbe wird nach (69) bis (70)

$$\eta_0 = \frac{\delta}{3} \qquad \eta_1 = - \frac{\delta}{3}$$

$$H = \frac{3}{8} w^2 \gamma \qquad p = \frac{2H}{d} = \frac{3}{4} \frac{w^2 \gamma}{d} \qquad d = \frac{3}{4} \frac{w^2 \gamma}{p}$$

Wird η_0 aus (67) negativ, so sind obige Formeln nicht mehr anwendbar, auch darf η_1 aus (68) nie positiv werden,

η_0 ist positiv, so lange

bei $\alpha = 10^0$ $\frac{a}{d} < 10, 3$ oder $\frac{w}{d} < 3,6$

„ $\alpha = 20^0$ $\frac{a}{d} < 2, 1$

„ $\alpha = 30^0$ $\frac{a}{d} < 0,56$

Wegen $\eta_1 < 0$ sind die Werthe $\frac{a}{d}$ noch beschränkter (vergl. §. 9).

Daraus folgt, dass die Formeln (67) und (68) nur selten zur Anwendung kommen.

Sind die Formeln (67) und (68) nicht anwendbar, d, h. ist η_0 (67) < 0 und η_1 (68) > 0, so erhalten wir die kleinsten Maximalpressungen, wenn wir $\eta_1 = 0$ setzen.

Alsdann wird wegen derselben Bedingungen wie in §. 4

$$\lambda = \lambda_0 - \frac{\delta}{3}\frac{1+\delta}{1-\frac{\delta}{3}} \tag{31}$$

und

$$\frac{p}{r\gamma} = \lambda \cos\alpha + \alpha \sin\alpha = \lambda_0 + 1 - \cos\alpha + (\lambda - \lambda_0)\cos\alpha \tag{71}$$

Zur Bestimmung der Gewölbstärke ergibt sich hieraus mittelst (31)

$$\frac{a}{d} = \frac{1}{6}\frac{\frac{p}{r\gamma} - \lambda_0 - 1}{\frac{p}{r\gamma} - \lambda_0 - 1 + \cos\alpha} - \frac{1}{3}\frac{1}{\frac{a}{d}+1} \tag{72}$$

(72) ist nur anzuwenden, wenn $\varphi > \alpha$.

§. 8.

Zusammenstellung von Formeln und Zahlenbeispiele.

A. Bestimmung der Maximalpressung bei gegebener Gewölbstärke.

A. I. Es tritt kein Reissen in der Bruchfuge ein.

[1] $$\lambda_0 = \alpha \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - 1 \tag{4}$$ (Tab. I)

[2] $$\lambda' = \lambda_0 - \frac{\delta}{3}\frac{1+\delta}{1-\frac{\delta}{3}} = \lambda_0 - \frac{\frac{a}{d}+1}{\left(\frac{2a}{d}+1\right)\left(\frac{3a}{d}+1\right)} \tag{31}$$

[3] (42) (Tab. II_1)

$$\varphi \operatorname{cotg}\varphi = \lambda' - \frac{\delta}{3}\frac{1-\delta}{1+\frac{\delta}{3}} = \lambda' - \frac{\frac{a}{d}}{\left(\frac{2a}{d}+1\right)\left(\frac{3a}{d}+2\right)}$$

[4] (Tab. II_2) $$\frac{p}{r\gamma} = \lambda' + \left(\frac{3a}{d} + 2\right)(\varphi - \sin\varphi)\ \mathrm{tg}\ \frac{\varphi}{2} \qquad (45)$$

[5] $$\frac{p_0'}{r\gamma} = 2\lambda' - \frac{p}{r\gamma} \qquad (47)$$

Setzt man $\varphi\ \mathrm{cotg}\ \varphi = 1 - \xi$,
so wird mit vollkommen genügender Annäherung

$$(\varphi - \sin\varphi)\ \mathrm{tg}\ \frac{\varphi}{2} = \frac{3}{4}\ \frac{\xi^2}{1 + 0{,}3\ \xi} \qquad (73)$$

setzt man nämlich $(\varphi - \sin\varphi)\ \mathrm{tg}\ \frac{\varphi}{2} = \frac{3}{4}\ \frac{\xi^2}{1 + \beta\xi}$
so wird für

$\varphi = 0$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\xi = 0$	0,2146	0,3954	1	∞
$\beta = 0{,}3$	0,3033	0,3061	0,3139	0,375

Da nur ausnahmsweise $\varphi > \frac{\pi}{3}$, so genügt es, $\beta = 0{,}3$ zu setzen.

A Ia. Wird $p_0' < -k'$, dagegen $p' > -k'$,

so setzt man $\frac{p}{r\gamma}$ aus [4] ein in

[6] $$\lambda'' = \lambda' + \frac{1}{2\left(\frac{3a}{d} + 1\right)}\ \frac{r\gamma}{p}\ \frac{\left(\frac{p}{r\gamma} - 2\lambda\right)^2}{1 - \cos\alpha} \qquad (34)$$

ferner wird

[7] (Tab. II_1) $$\varphi\ \mathrm{cotg}\ \varphi = \lambda'' - \frac{\frac{a}{d}}{\left(\frac{2a}{d} + 1\right)\left(\frac{3a}{d} + 2\right)} \qquad (42)$$

[8] (Tab. II_2) (51)
$$\frac{p}{r\gamma} = \lambda'' + \left(\frac{3a}{d} + 2\right)(\varphi - \sin\varphi)\ \mathrm{tg}\ \frac{\varphi}{2} + \frac{1}{2}\ \frac{r\gamma}{p}\left(\frac{p}{r\gamma} - 2\lambda''\right)^2$$

Weicht der sich aus [8] ergebende Werth von $\frac{p}{r\gamma}$ erheblich von dem aus [4] ab, so ist die Rechnung zu wiederholen, d. h. $\frac{p}{r\gamma}$ aus [8] in [6] einzusetzen u. s. w.

A. II. Es tritt ein Reissen in den Bruchfugen ein.

In diesem Fall empfiehlt es sich, Gewölbstärken für angenommene Pressungen zu berechnen und die Pressung in einem gegebenen Gewölbe durch Interpolation zu finden.

A. IIa. Es tritt ein Reissen in der Scheitelfuge und in der ihr zunächstliegenden Bruchfuge ein.

IIa ist ebenso zu behandeln wie II.

A. III. Das Gewölbe hat keine Bruchfuge zwischen Scheitel- und Kämpferfuge.

Wird φ aus [3] grösser als α, so wird, wenn nicht (69) und (70) zur Anwendung kommt,

[9] $$\frac{p}{r\gamma} = \lambda' \cos\alpha + \alpha \sin\alpha = \lambda_0 + 1 - \cos\alpha - (\lambda_0 - \lambda') \cos\alpha \qquad (71)$$

Ist $\frac{\delta}{3} > \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha}$ und η_1 aus (68) negativ, so wird

[10] $$\lambda = \frac{\lambda_0 \left(1 + \frac{\delta}{3}\right) + \frac{\delta}{3}(1 - \delta)}{\frac{\delta}{3} \operatorname{cotg}^2 \frac{\alpha}{2} - 1} \qquad (69)$$

und

[11] $$\frac{p}{r\gamma} = \frac{3}{\delta}(1 - \cos\alpha)\left[\lambda_0 \left(1 + \frac{\delta}{3}\right) + \frac{\delta}{3}(1 - \delta)\right] \qquad (70)$$

B. Bestimmung der Gewölbstärke bei gegebener Maximalpressung.

B. I. Es tritt kein Reissen in den Bruchfugen ein.

[1] $$\frac{a}{d} = \frac{1}{3}\left\{\frac{\frac{p}{r\gamma} - \lambda'}{(\varphi - \sin\varphi) \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} - 2\right\} \qquad (55)$$

r, λ' und φ ergeben sich aus den entsprechenden Formeln unter A. I.

Es empfiehlt sich oft, Pressungen für angenommene Gewölbstärken zu berechnen und die Gewölbstärke bei gegebener Pressung durch Interpolation zu finden.

B. Ia. Es tritt ein Reissen in der Scheitelfuge ein.

$p_0' < -k'$, dagegen $p' > -k'$ und $p_1' > -k'$

[2] $$\frac{a}{d} = \frac{1}{3}\left\{\frac{\frac{p}{r\gamma} - \lambda'' - \frac{1}{2}\frac{r\gamma}{p}\left(\frac{p}{r\gamma} - 2\lambda''\right)^2}{(\varphi - \sin\varphi) \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} - 2\right\} \qquad (56)$$

r, λ'' und φ ergeben sich aus den entsprechenden Formeln unter A. Ia.

B. II. Es tritt ein Reissen in den Bruchfugen ein.

[3] $$\lambda_0 = \alpha \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - 1 \qquad (4)\ (\text{Tab. I})$$

[4] (37)

$$\eta_0 + \eta_1 - \delta = \delta \left\{ 1 - \frac{4\,r\gamma}{3\,p} \left[2\,\lambda_0 + 1 - \cos\alpha + (\lambda' - \lambda_0)\,(1 + \cos\alpha) \right] \right\}$$

[5] (36)

$$\lambda' = \lambda_0 + \frac{\eta_0 + \eta_1 - \delta - \frac{1}{3}\,\delta^2}{1 + \eta_0 + \eta_1 - \delta}$$

[6] (54) (Tab. II_6)

$$\varepsilon \left[\frac{2\,a}{d} + \frac{8}{3}\,\frac{r\gamma}{p}\,(\lambda \cos\varphi + \varphi \sin\varphi) \right] = 1 - \frac{8}{3}\,\frac{r\gamma}{p}\,(\lambda \cos\varphi + \varphi \sin\varphi) + \frac{\delta}{3}$$

[7] (52) (Tab. II_1)

$$\varphi \operatorname{cotg} \varphi = \lambda' + \varepsilon$$

[8] (57) (Tab. $II_{2,\,3,\,4,\,5}$)

$$\frac{a}{d}\,(\varphi - \sin\varphi)\,\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \lambda' - \frac{4\,r\gamma}{3\,p}\left(\frac{\varphi^2}{2} + \varphi^2 \operatorname{cotg}^2\varphi - \varphi \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{4\,r\gamma}{3\,p}\,\varepsilon\left[\varphi \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi + \cos^2\varphi - \varepsilon\left(1 - \frac{(1 - \cos\varphi)^2}{2}\right)\right]$$

oder

[8*]

$$\frac{a}{d}\,(\varphi - \sin\varphi)\,\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \lambda' - \frac{4\,r\gamma}{3\,p}\,(A - B\,\varepsilon + C\,\varepsilon^2)$$

wo

$$A = \frac{\varphi^2}{2} + \varphi^2 \operatorname{cotg}^2\varphi - \varphi \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} \qquad \text{(Tab. } II_3\text{)}$$

$$B = \varphi \operatorname{cotg}\frac{\varphi}{2} - \cos\varphi + \cos^2\varphi \qquad \text{(Tab. } II_4\text{)}$$

$$C = 1 - \frac{(1 - \cos\varphi)^2}{2} \qquad \text{(Tab. } II_5\text{)}$$

Wird φ klein, so ist (73) anzuwenden.

B. II a. Wird $p_1' > -k'$, d. h. findet kein Reissen in der Kämpferfuge statt, so ist

[9] (41)

$$\lambda'' = \lambda_0 + \frac{\eta_0 + \eta_1 - \delta - \frac{\delta^2}{3} - \frac{\delta}{3}\,\frac{\lambda}{\nu_1}\cdot\frac{r\gamma}{p}\cdot\frac{\left(2\nu - \frac{p}{r\gamma}\right)^2}{1 - \cos\alpha}}{1 + \eta_0 + \eta_1 - \delta}$$

in den Formeln B. II. an die Stelle von λ' zu setzen.

B. III. Das Gewölbe hat keine Bruchfuge zwischen Scheitel- und Kämpferfuge.

[10] (72)

$$\frac{a}{d} = \frac{1}{6}\,\frac{1 + \lambda_0 - \frac{p}{r\gamma}}{1 + \lambda_0 - \cos\alpha - \frac{p}{r\gamma}} - \frac{1}{3}\,\frac{1}{\frac{a}{d} + 1}$$

ist

$$\frac{\delta}{3} > \frac{1 - \cos\alpha}{\cos\alpha} \text{ und } \eta_1\,(68) < 0$$

so gilt

[11] $$\frac{a}{d} = \frac{1}{6\lambda_0}\left(\frac{\frac{p}{r\gamma} - \alpha \sin\alpha}{1 - \cos\alpha} + \delta\right) - \frac{1}{2} \qquad (70)$$

B. IV. Mathematische Gewölbstärke.

[12] $$\lambda_0 = \alpha \operatorname{cotg}\frac{\alpha}{2} - 1 \qquad (4)$$

[13] $$\lambda' = \lambda_0 + \frac{1}{\frac{2a}{d} + 1}\left(1 - \frac{2}{3\left(\frac{a}{d} + 1\right)}\right) \qquad (59)$$

für $\frac{a}{d}$ ist zunächst ein angenommener Werth einzusetzen; eventuell ist zunächst $\lambda' = \lambda_0$ zu setzen.

$$\varphi \operatorname{cotg}\varphi = \lambda' + \frac{1}{\frac{2a}{d} + 1}\left(1 + \frac{2}{\frac{3a}{d}}\right) = \lambda_0 + \frac{2}{\frac{2a}{d} + 1}$$

[14] $$\left[1 + \frac{1}{\frac{3a}{d}\left(\frac{a}{d} + 1\right)}\right] \qquad (60)$$

[15] $$\frac{a}{d} = \frac{\lambda'}{(\varphi - \sin\varphi)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}} \qquad (58)$$

Setzt man $\varphi \operatorname{cotg}\varphi = 1 - \xi$, so wird mit genügender Annäherung

$$\frac{a}{d} = \frac{4}{3}\lambda' \frac{1 + 0{,}3\xi}{\xi^2}$$

Zahlenbeispiel zu A. I.

$\alpha = 50^0$ $\quad \frac{a}{d} = 15$ $\quad \lambda_0 = 0{,}8715$ T.I.

$\lambda_0 - \lambda' = 0{,}0112$

$\lambda' = 0{,}8603$

$\lambda' - \varphi \operatorname{cotg}\varphi = 0{,}0103$

$\varphi \operatorname{cotg}\varphi = 0{,}8500$

$\varphi = 37{,}86^0$ T.II$_1$.

$(\varphi - \sin\varphi)\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = 0{,}0162$ T.II$_2$.

$\left(\frac{3a}{d} + 2\right) 0{,}0162 = 0{,}7614$

$\frac{\lambda'}{\frac{p}{r\gamma}} = 0{,}8603$

$\frac{p}{r\gamma} = 1{,}622$

$\frac{p_0'}{r\gamma} = 0{,}099$

oder

$\xi = 1 - \varphi \operatorname{cotg}\varphi = 0{,}1500$

$\xi^2 = 0{,}0225$

$1 + 0{,}3\xi = 1{,}0450$

$\frac{\xi^2}{1 + 0{,}3\xi} = 0{,}02155$

$\frac{3}{4}\left(\frac{3a}{d} + 1\right)\frac{\xi^2}{1 + 0{,}3\xi} = 0{,}7589$

$\frac{\lambda'}{\frac{p}{r\gamma}} = 0{,}8603$

$\frac{p}{r\gamma} = 1{,}619$

Dieser Werth ist genauer als 1,622.

Ist $a = 9$, $d = 0{,}6$ oder $w = 13{,}79$, $f = 3{,}215$ und $\gamma = 1{,}6$ Tonne so wird $r = 9{,}3$, $\frac{p}{\gamma} = 15{,}06^{m}$ oder $p = 2{,}41^{k}$ pro □ Cm.

Zahlenbeispiel zu A. Ia. $\alpha = 80^{0}$ $\frac{a}{d} = 4$

Erste Annäherung.

λ_0	$= 0{,}6640$
$\lambda_0 - \lambda'$	$= 0{,}0427$
λ'	$= 0{,}6213$
$\lambda' - \varphi \operatorname{cotg} \varphi$	$= 0{,}0317$
$\varphi \operatorname{cotg} \varphi$	$= 0{,}5896$

$\varphi = 61^{0},03$

$(\varphi - \sin \varphi) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 0{,}1122$

$\left(\frac{3a}{d} + 2\right) 0{,}1122$	$= 1{,}5708$
λ'	$= 0{,}6213$
$\frac{p}{r\gamma}$	$= 2{,}1921$
$\frac{p_0'}{r\gamma}$	$= - 0{,}9495$

$\frac{p'}{r\gamma} = 2\nu - \frac{p}{r\gamma} = + 0{,}6579$

Zweite Annäherung.

$\frac{p}{r\gamma} - 2\lambda'$	$= 0{,}9495$
$\frac{r\gamma}{p} \frac{0{,}9495^2}{1 - \cos \alpha}$	$= 0{,}498$
$\frac{\delta}{3 - \delta} 0{,}498$	$= 0{,}0192$
λ'	$= 0{,}6213$
λ''	$= 0{,}6405$
$\lambda'' - \varphi \operatorname{cotg} \varphi$	$= 0{,}0317$
$\varphi \operatorname{cotg} \varphi$	$= 0{,}6088$

$\varphi = 59^{0},70$

$(\varphi - \sin \varphi) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$	$= 0{,}1025$
$\left(\frac{3a}{d} + 2\right) 0{,}1025$	$= 1{,}4350$
λ''	$= 0{,}6405$
$\frac{1}{2} \frac{r\gamma}{p} \left(\frac{p}{r\gamma} - 2\lambda'\right)^2$	$= 0{,}2060$
$\frac{p}{r\gamma}$	$= 2{,}2815$

	Dritte Annäherung.	Vierte
$\frac{p}{r\gamma}$	$= 2{,}2815$	$2{,}2878$
$\frac{p}{r\gamma} - 2\lambda''$	$= 1{,}0005$	$1{,}0042$
$2\lambda''$	$= 1{,}2810$	$1{,}2836$
$\frac{r\gamma}{p}$ &c.	$= 0{,}532$	$0{,}533$
$\frac{\delta}{3 - \delta} 0{,}532$	$= 0{,}0205$	$0{,}0205$
λ'	$= 0{,}6213$	$0{,}6213$

Es wird

$\nu = 1{,}2221$

$\nu_1 = 1{,}4865$

somit

$\frac{p'}{r\gamma} = 0{,}1554$

$\frac{p'_1}{r\gamma} = 0{,}6842$

λ'' $= 0{,}6418$ $0{,}6418$

$\lambda'' - \varphi \operatorname{cotg} \varphi = 0{,}0317$ wie vorhin

$\varphi \operatorname{cotg} \varphi = 0{,}6101$

$\varphi = 59{,}61°$

$(\varphi \sin \varphi) \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} = 0{,}1019$

$\left(\frac{3a}{p} + 2\right) 0{,}1019 = 1{,}4266$ $1{,}4266$

$\lambda'' = 0{,}6418$ $0{,}6418$

$\frac{1}{2} \frac{r\gamma}{d} \left(\frac{p}{r\gamma} - 2\lambda''\right)^2 = 0{,}2194$ $0{,}2204$

$\frac{p}{r\gamma} = 2{,}2878$ $2{,}2888$

Ist beispielsweise

$a = 3$ $d = 0{,}75$

$\gamma = 1{,}6$ Ton.

so wird $r = 3{,}375$

$\frac{p}{\gamma} = 7{,}725$ m

$p = 1{,}24$ k pro □ cm

$w = 5{,}91$

$f = 2{,}48$

Zahlenbeispiel zu B. II.

$\alpha = 60°$ $\quad \frac{4}{3} \frac{r\gamma}{p} = 0{,}3$ $\quad \frac{p}{r\gamma} = 4{,}444$

Annahme

$\frac{a}{d} = 28$ $\quad \lambda' = 0{,}82$ $\quad \varphi = 41°$

$\delta = \frac{1}{57} = 0{,}01754$ $\quad \frac{\delta^2}{3} = 0{,}00010$

$\eta_0 + \eta_1 - \delta = 0{,}01754\ [1 - 0{,}3\ (2 \cdot 0{,}8138 + 1 - 0{,}5 + 0{,}006 \cdot 1{,}5)]$

$= 0{,}00630$

$\lambda' - \lambda_0 = \frac{0{,}00630 - 0{,}00010}{1{,}00630} = 0{,}00620\ (1 - 0{,}00630 + 0{,}00004)$

$= 0{,}00616$

$\lambda_0 = 0{,}8138$

$\lambda = 0{,}8200$

$\varepsilon\ [56 + 0{,}6\ (0{,}8200 \cdot 0{,}7547 + 0{,}4695)] = 1 - 0{,}6 \cdot 1{,}0884 + 0{,}00585$

$\varepsilon = 0{,}00623$

$\lambda' = 0{,}8200$

$\varphi \operatorname{cotg} \varphi = 0{,}8262$

$\varphi = 40°{,}66$

$\frac{a}{d} \cdot 0{,}0215_5 = 0{,}8200 - 0{,}3\ (0{,}6715 - 1{,}732 \cdot 0{,}00623 + 0{,}971 \cdot 0{,}00004)$

$\frac{a}{d} = 28{,}85$

$$\frac{a}{d} = 28{,}85 \qquad \lambda = 0{,}8200 \qquad \varphi = 40°{,}66$$

$$\delta = \frac{1}{58{,}7} = 0{,}01704 \qquad \frac{\delta^2}{3} = 0{,}00010$$

$$\eta_0 + \eta_1 - \delta = 0{,}01704\ (1 - 0{,}3\ .\ 0{,}6410) = 0{,}00612$$

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{0{,}00612 - 0{,}00010}{1{,}00612} = 0{,}00598$$

$$\lambda = 0{,}8138 + 0{,}0060 = 0{,}8198$$

$$\varepsilon\ [57{,}7 + 0{,}6\ (0{,}8198\ .\ 0{,}7585 + 0{,}4624)] = 1 - 0{,}6\ .\ 1{,}0842 + 0{,}00568$$

$$\varepsilon = 0{,}00609$$

$$\lambda' = 0{,}8198$$

$$\varphi \operatorname{cotg} \varphi = 0{,}8259$$

$$\varphi = 40°{,}694$$

$$\frac{a}{d}\ .\ 0{,}0216 = 0{,}8198 - 0{,}3\ (0{,}6710 - 1{,}732\ .\ 0{,}00609 + 0{,}97\ .\ 0{,}00004)$$

$$\frac{a}{d} = 28{,}78$$

$$\lambda = 0{,}8198 \qquad \varphi = 40°{,}69$$

Ist z. B.

$d = 0{,}5\ ^{m}$ und $\gamma = 1{,}6\ ^{Ton.}$, so wird $a = 14{,}39$, $r = 14{,}64$, $w = 24{,}92$, $f = 7{,}19$

und

$$\frac{4}{3}\frac{r\gamma}{p} = 0{,}3 \qquad \frac{p}{\gamma} = 65{,}07\ ^{m}$$

$p = 14{,}97\ ^{k}$ pro $\square\ ^{cm}$ $\qquad H = 9{,}60\ ^{Ton.}$ $\qquad Q = 12{,}26\ ^{Ton.}$

Zahlenbeispiel zu B. II a.

Es sei

$$\alpha = 90° \qquad \frac{4r\gamma}{3p} = 0{,}5 \qquad \frac{p}{r\gamma} = 2{,}667 \qquad \nu_1 = 1{,}5708$$

$$\text{somit } \frac{p_1}{r\gamma} = + 0{,}4749$$

Annahme

$$\frac{a}{d} = 3 \qquad \lambda = 0{,}56 \qquad \varphi = 65°$$

$$\delta = \frac{1}{7} = 0{,}14286 \qquad \frac{\delta^2}{3} = 0{,}00680$$

$$\eta_0 + \eta_1 - \delta = \frac{1}{7}\,[1 - 0{,}5\ (2\,.\,0{,}571 + 1 - 0{,}011\,.\,1)] = -\,0{,}00936$$

$$\frac{\delta}{3}\cdot\frac{\lambda}{\nu_1}\cdot\frac{r\gamma}{p}\,\frac{\left(2\nu - \frac{p}{r\gamma}\right)^2}{1 - \cos\alpha} = \frac{1}{21}\cdot\frac{0{,}56}{1{,}57}\,.\,0{,}375\,\frac{(3{,}142 - 2{,}667)^2}{1}$$

$$= 0{,}00144$$

$$\lambda - \lambda_0 = \frac{-\,0{,}00936 - 0{,}00680 - 0{,}00143}{1 - 0{,}00936} = -\,0{,}0178$$

$$\lambda = 0{,}5708 - 0{,}0178 = 0{,}5530$$

Die Fortsetzung der Rechnung ist wie im vorigen Beispiel. Wir erhalten durch allmälige Annäherung

$$\frac{a}{d} = 2{,}898 \qquad \lambda = 0{,}5529 \qquad \varphi = 65^0{,}44$$

Handelt es sich um Berechnung eines Gewölbes, so ist zu untersuchen, welche Formeln anzuwenden sind. Hiezu kann man sich der folgenden Tafeln bedienen, oder man berechnet zunächst nach §. 8 A I., resp. B I., und sieht, ob die dort geltenden Voraussetzungen ($\varphi < \alpha$ und $p_0' > -\,k'$) zutreffen. Ist dies nicht der Fall, so sind je nach den sich ergebenden Resultaten andere Formeln des §. 8 anzuwenden.

Maximalpressung. Horizontalschub $H = \lambda r d \gamma$

	$\frac{a}{d} = 1$	1,2	1,5	2	3	4
$\delta = 1 : \left(\frac{2a}{d} + 1\right)$	0,3333	0,2941	0,2500	0,2000	0,1429	0,1111
$\lambda_0 - \lambda'$ (31)	0,1667	0,1407	0,1136	0,0857	0,0571	0,0427
$\lambda' - \varphi \operatorname{cotg} \varphi$ (42)	0,0667	0,0630	0,0577	0,0500	0,0390	0,0317
$\frac{3a}{d} + 2 = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\delta} + 1\right)$	5	5,6	6,5	8	11	14
$\alpha = 10^0$	$\frac{p}{r\gamma} = 0{,}162$					
$\lambda_0 = 0{,}995$	$\lambda = 0{,}081$					
$v_0 = 1{,}010$	$\varphi = 10^0$					
$\alpha = 20^0$	$\frac{p}{r\gamma} =$				0,99	
$\lambda_0 = 0{,}980$	$\lambda =$				0,923	
$v_0 = 1{,}040$	$\varphi =$				20^0	
$\alpha = 30^0$	$\frac{p}{r\gamma} = 0{,}94$					
$\lambda_0 = 0{,}954$	$\lambda = 0{,}787$					
$v_0 = 1{,}088$	$\varphi = 30^0$					
$\alpha = 40^0$	$\frac{p}{r\gamma} = 1{,}02$				1,11	1,12
$\lambda_0 = 0{,}918$	$\lambda = 0{,}751$				0,861	0,875
$v_0 = 1{,}152$	$\varphi = 40^0$				40^0	$38{,}6^0$
$\alpha = 50^0$	$\frac{p}{r\gamma} = 1{,}12$		1,16	1,17	1,20	1,24
$\lambda_0 = 0{,}871$	$\lambda = 0{,}705$		0,758	0,786	0,814	0,829
$v_0 = 1{,}229$	$\varphi = 50^0$		50^0	$49{,}7^0$	$46{,}0^0$	$43{,}8^0$
$\alpha = 60^0$	$\frac{p}{r\gamma} = 1{,}23$	1,24	1,26	1,29	1,36	1,43
$\lambda_0 = 0{,}814$	$\lambda = 0{,}647$	0,673	0,700	0,728	0,757	0,771
$v_0 = 3{,}314$	$\varphi = 60^0$	$59{,}6^0$	$57{,}3^0$	$54{,}5^0$	$51{,}3^0$	$49{,}4^0$
$\alpha = 70^0$	$\frac{p}{r\gamma} = 1{,}36$		1,42	1,48	1,61	1,75
$\lambda_0 = 0{,}745$	$\lambda' = 0{,}583$		0,633	0,661	0,690	0,706
$v_0 = 1{,}403$	$\varphi = 65{,}8^0$		$62{,}0^0$	$59{,}5^0$	$56{,}6^0$	$54{,}8^0$
$\alpha = 80^0$	$\frac{p}{r\gamma} = 1{,}56$		1,67	1,78	2,03	2,29
$\lambda_0 = 0{,}664$	$\lambda = 0{,}523$		0,569	0,595	0,625	0,642
$v_0 = 1{,}490$	$\varphi = 69{,}4^0$		$66{,}1^0$	$64{,}0^0$	$61{,}3^0$	$59{,}6^0$
$\alpha = 90^0$	$\frac{p}{r\gamma} = 1{,}85$		2,04	2,24	2,72	3,23
$\lambda_0 = 0{,}571$	$\lambda = 0{,}462$		0,504	0,530	0,556	0,578
$v_0 = 1{,}571$	$\varphi = 72{,}7^0$		$69{,}9^0$	$68{,}0^0$	$65{,}0^0$	$61{,}6^0$

Die doppelten Linien theilen die Tafel nach der Berechnungsweise ein:
1) oben links §. 8 A III [10] u. [11]. 2) §. 8 A III [9]. 3) §. 8 A I. 4) §. 8 A Ia. 5) §. 8 A

Resultate.

und Bruchfuge bei gegebener Gewölbstärke.

6	8	10	15	20	30	40	50	80	100
0,0769	0,0588	0,0476	0,0323	0,0244	0,0164	0,0123	0,0099	0,0062	0,0050
0,0283	0,0212	0,0169	0,0112	0,0084	0,0056	0,0042	0,0033	0,0021	0,0017
0,0231	0,0181	0,0149	0,0103	0,0079	0,0053	0,0040	0,0033	0,0020	0,0011
20	26	32	47	62	92	122	152	242	302
	0,800		1,00				1,01	1,01	1,01
	0,670		0,984				0,992	0,993	0,993
	10°		10°				10°	9,5°	9,1°
			1,03	1,03	1,04	1,05	1,06	1,08	1,10
			0,968	0,971	0,974	0,976	0,976	0,978	9,978
			20°	18,9°	17,5°	16,7°	16,2°	15,5°	15,2°
1,06	1,07	1,08	1,09	1,12	1,17	1,21	1,26	1,40	1,49
0,926	0,933	0,937	0,943	0,946	0,949	0,950	0,951	0,952	0,952
30°	28,7°	27,4°	25,6°	24,6°	23,5°	23,0°	22,6°	22,1°	21,9°
1,15	1,18	1,20	1,27	1,35	1,48	1,63	1,78		
0,890	0,897	0,901	0,907	0,910	0,913	0,914	0,915		
35,8°	34,1°	33,1°	31,6°	30,8°	30,0°	29,5°	29,3°		
1,31	1,37	1,44	1,62	1,80					$\frac{a}{d} = 88{,}1$
0,843	0,850	0,855	0,860	0,863					$p = \infty$
41,3°	40,0°	39,1°	37,9°	37,2°					0,877
									33,6°
1,58	1,73	1,88	2,28	2,78	4,86	19,0	$\frac{a}{d} = 43{,}3$		
0,786	0,794	0,798	0,807	0,813	0,820	0,824	$p = \infty$		
47,2°	46,0°	45,2°	43,8°	42,2°	40,5°	39,6°	0,825		
							39,4°		
2,04					$\frac{a}{d} = 23{,}6$				
0,723					$p = \infty$				
52,7°					0,765				
					44,9°				
			$\frac{a}{d} = 14{,}0$						
			$p = \infty$						
			0,697						
			50°,0						
5,38	18,8	$\frac{a}{d} = 8{,}82$							
0,603	0,617	$p = \infty$							
57,5°	55,1°	0,621							
		54,4°							

vergl. folgende Tafel. 6) §. 8 B IV.

Gewölbstärken bei vorgeschriebener Maximalpressung (§. 8 B II, II a u. IV).

	$\frac{4}{3}\frac{r\gamma}{p} = 0{,}5$	0,4	0,3	0,2	0,1	0,05	0
	$\frac{p}{r\gamma} = 2{,}667$	3,333	4,444	6,667	13,33	26,67	∞
$\alpha = 60^0$	$\frac{a}{d} = 19{,}03$		28,78		38,62		43,34
	$\lambda = 0{,}812$		0,820		0,824		0,825
	$\varphi = 42{,}5^0$		$40{,}7^0$		$39{,}7^0$		$39{,}4^0$
$\alpha = 90^0$	$\frac{a}{d} = 2{,}90$	4,17	5,38	6,54	7,68	8,26	8,82
	$\lambda = 0{,}553$	0,582	0,597	0,608	0,615	0,618	0,621
	$\varphi = 65{,}4^0$	$61{,}1^0$	$58{,}5^0$	$56{,}8^0$	$55{,}5^0$	$55{,}2^0$	$54{,}4^0$

Obige Tafeln können zur Berechnung von Gewölben benützt werden. Sollen die sich durch Interpolation ergebenden Resultate die Genauigkeit der Tafelzahlen erreichen, so sind die zweiten Differenzen zu beachten.

§. 10. Hilfstafeln.

I. Tafel der Werthe $\lambda_0 = \alpha \operatorname{cotg} \frac{\alpha}{2} - 1$

	λ_0	$\Delta\lambda_0$		λ_0	$\Delta\lambda_0$		λ_0	$\Delta\lambda_0$
$\alpha =$ 0°	1,0000	1	$\alpha =$ 30°	0,9541	31	$\alpha =$ 60°	0,8138	64
1	0,9999	1	31	0,9510	33	61	0,8074	65
2	0,9998	3	32	0,9477	33	62	0,8009	66
3	0,9995	3	33	0,9444	34	63	0,7943	67
4	0,9992	5	34	0,9410	36	64	0,7876	68
5	0,9987	5	35	0,9374	36	65	0,7808	70
6	0,9982	7	36	9,9338	38	66	0,7738	71
7	0,9975	7	37	0,9300	38	67	0,7667	72
8	0,9968	9	38	0,9262	40	68	0,7595	73
9	0,9959	10	39	0,9222	41	69	0,7522	74
10	0,9949	10	40	0,9181	42	70	0,7448	75
11	0,9939	12	41	0,9139	43	71	0,7373	77
12	0,9927	13	42	0,9096	44	72	0,7296	78
13	0,9914	13	43	0,9052	45	73	0,7218	79
14	0,9901	15	44	0,9007	46	74	0,7139	80
15	0,9886	16	45	0,8961	47	75	0,7059	81
16	0,9870	17	46	0,8914	48	76	0,6978	83
17	0,9853	18	47	0,8866	50	77	0,6895	84
18	0,9835	18	48	0,8816	50	78	0,6811	85
19	0,9817	20	49	0,8766	51	79	0,6726	86
20	0,9797	21	50	0,8715	53	80	0,6640	87
21	0,9776	22	51	0,8662	54	81	0,6553	89
22	0,9754	23	52	0,8608	55	82	0,6464	90
23	0,9731	24	53	0,8553	56	83	0,6374	91
24	0,9707	25	54	0,8497	57	84	0,6283	93
25	0,9682	26	55	0,8440	58	85	0,6190	94
26	0,9656	27	56	0,8382	59	86	0,6096	95
27	0,9629	28	57	0,8323	60	87	0,6001	96
28	0,9601	30	58	0,8263	62	88	0,5905	98
29	0,9571	30	59	0,8201	63	89	0,5807	99
30	0,9541		60	0,8138		90	0,5708	

Tafel II.

	1		2		3		4		5		6	
	$\varphi \cot g\, \varphi$	Δ —	$(\varphi - \sin\varphi) \cdot \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$	Δ +	$A = \frac{\varphi^2}{2} + \varphi^2 \cot g^2 \varphi - \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$	Δ —	$B = \varphi \cot g \frac{\varphi}{2} - \cos\varphi + \cos^2\varphi$	Δ —	$C = 1 - \frac{(1-\cos\varphi^2)}{2}$	Δ —	$\varphi \sin \varphi$	Δ +
$\varphi = 0°$	1,0000	1	0,0000		1,0000	2	2,000		1,00		0,0000	3
1	0,9999	3	0,0000		0,9998	6					0,0003	9
2	0,9996	5	0,0000		0,9992	10					0,0012	15
3	0,9991	7	0,0000		0,9982	14					0,0027	22
4	0,9984	9	0,0000		0,9968	18					0,0049	27
5	0,9975	11	0,0000		0,9950	23	1,995		1,00		0,0076	33
6	0,9964	14	0,0000		0,9927	26					0,0109	40
7	0,9950	15	0,0000		0,9901	31					0,0149	45
8	0,9935	17	0,0000		0,9870	34					0,0194	52
9	0,9918	20	0,0001	1	0,9836	39					0,0246	57
10	0,9898	21	0,0001	0	0,9797	42	1,980		1,00		0,0303	63
11	0,9877	23	0,0001	0	0,9755	47					0,0366	69
12	0,9854	26	0,0002	1	0,9708	50					0,0435	75
13	0,9828	28	0,0002	0	0,9658	55					0,0510	81
14	0,9800	29	0,0003	1	0,9603	59					0,0591	87
15	0,9771	32	0,0004	1	0,9544	62	1,956		1,00		0,0678	92
16	0,9739	34	0,0005	1	0,9482	67					0,0770	98
17	0,9705	36	0,0006	1	0,9425	70					0,0868	103
18	0,9669	38	0,0008	2	0,9355	75					0,0971	109
19	0,9631	40	0,0010	2	0,9270	78					0,1080	114
20	0,9591	43	0,0012	2	0,9192	83	1,923		1,00		0,1194	119
21	0,9548	44	0,0015	3	0,9109	86					0,1313	125
22	0,9504	47	0,0018	3	0,9023	90					0,1438	131
23	0,9457	49	0,0022	4	0,8933	95					0,1569	135
24	0,9408	51	0,0026	4	0,8838	98					0,1704	140
25	0,9357	53	0,0030	4	0,8740	102	1,883		1,00		0,1844	145
26	0,9304	55	0,0036	6	0,8638	105					0,1989	150
27	0,9249	58	0,0041	5	0,8533	110					0,2139	155
28	0,9191	60	0,0048	7	0,8423	113					0,2294	160
29	0,9131	62	0,0055	7	0,8310	117					0,2454	164
30	0,9069	64	0,0063	8	0,8193	121	1,838		0,99		0,2618	169
31	0,9005	67	0,0072	9	0,8072	125					0,2787	173
32	0,8938	69	0,0082	10	0,7947	129					0,2960	177
33	0,8869	71	0,0093	11	0,7818	132					0,3137	181
34	0,8798	74	0,0105	12	0,7686	136					0,3318	186
35	0,8724	76	0,0118	13	0,7550	139	1,789		0,98		0,3504	189
36	0,8648	78	0,0132	14	0,7411	143					0,3693	193
37	0,8570	81	0,0147	15	0,7268	146					0,3886	197
38	0,8489	83	0,0164	17	0,7122	150					0,4083	201
39	0,8406	86	0,0182	18	0,6972	153					0,4284	204
40	0,8320	88	0,0201	19	0,6819	157	1,739		0,97		0,4488	207
41	0,8232	91	0,0223	22	0,6662	161					0,4695	210
42	0,8141	93	0,0245	22	0,6501	164					0,4905	213
43	0,8048	96	0,0270	25	0,6337	167					0,5118	217
44	0,7952	98	0,0296	26	0,6170	170					0,5335	219
45	0,7854		0,0324	28	0,6000		1,689		0,96		0,5554	

Tafel II.

	1		2		3		4		5		6	
	φ cotg φ	Δ —	$(\varphi - \sin\varphi)$. tg $\frac{\varphi}{2}$	Δ +	$\mathbf{A} = \frac{\varphi^2}{2} + \varphi^2 \cot g^2 \varphi - \varphi \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$	Δ —	$\mathbf{B} = \varphi \cot g \frac{\varphi}{2} - \cos\varphi + \cos^2\varphi$	Δ —	$\mathbf{C} = 1 - \frac{(1-\cos\varphi)^2}{2}$	—	$\varphi \sin \varphi$	Δ +
$\varphi = 45^0$	0,7854	101	0,0324	30	0,6000	174	1,689		0,96		0,5554	221
46	0,7753	103	0,0354	33	0,5826	176					0,5775	224
47	0,7650	107	0,0387	34	0,5650	180					0,5999	227
48	0,7543	109	0,0421	37	0,5470	183					0,6226	229
49	0,7434	111	0,0458	39	0,5287	186					0,6455	230
50	0,7323	115	0,0497	42	0,5101	189	1,642		0,94		0,6685	233
51	0,7208	117	0,0539	44	0,4912	192					0,6918	234
52	0,7091	120	0,0583	47	0,4720	195					0,7152	236
53	0,6971	123	0,0630	50	0,4525	197					0,7388	237
54	0,6848	126	0,0680	53	0,4328	200					0,7625	238
55	0,6722	129	0,0733	56	0,4128	202	1,599		0,91		0,7863	240
56	0,6593	132	0,0789	59	0,3926	205					0,8103	240
57	0,6461	135	0,0848	62	0,3721	207					0,8343	242
58	0,6326	139	0,0910	66	0,3514	210					0,8585	242
59	0,6187	141	0,0976	70	0,3304	212					0,8827	242
60	0,6046	145	0,1046	73	0,3092	213	1,564		0,88		0,9069	243
61	0,5901	147	0,1119	78	0,2879	216					0,9312	242
62	0,5754	151	0,1197	81	0,2663	217					0,9554	243
63	0,5603	155	0,1278	85	0,2446	219					0,9797	243
64	0,5448	158	0,1363	90	0,2227	221					1,0040	242
65	0,5290	161	0,1453	95	0,2006	222	1,537		0,83		1,0282	241
66	0,5129	165	0,1548	99	0,1784	223					1,0523	241
67	0,4964	169	0,1647	104	0,1561	224					1,0764	240
68	0,4795	172	0,1751	109	0,1337	225					1,1004	239
69	0,4623	176	0,1860	115	0,1112	226					1,1243	238
70	0,4447	180	0,1975	120	0,0886	227	1,520		0,78		1,1481	236
71	0,4267	184	0,2095	125	0,0659	227					1,1717	234
72	0,4083	188	0,2220	132	0,0432	226					1,1951	233
73	0,3895	192	0,2352	137	0,0206	226					1,2184	231
74	0,3703	196	0,2489	143							1,2415	229
75	0,3507	200	0,2632	151			1,514		0,73		1,2644	226
76	0,3307	204	0,2783	156							1,2870	224
77	0,3103	209	0,2939	164							1,3094	222
78	0,2894	214	0,3103	171							1,3316	219
79	0,2680	218	0,3274	178							1,3535	216
80	0,2462	223	0,3452	187			1,521		0,66		1,3751	212
81	0,2239	228	0,3639	194							1,3963	209
82	0,2011	232	0,3833	202							1,4172	206
83	0,1779	238	0,4035	211							1,4378	202
84	0,1541	243	0,4246	220							1,4580	199
85	0,1298	248	0,4466	228			1,539		0,58		1,4779	195
86	0,1050	254	0,4694	239							1,4974	190
87	0,0796	260	0,4933	248							1,5164	186
88	0,0536	265	0,5181	258							1,5350	181
89	0,0271	271	0,5439	269							1,5531	177
90	0,0000		0,5708		$\overline{1}$,6629		1,571		0,50		1,5708	